復刊

束　論

岩村　聯 著

共立出版株式会社

まえがき

束あるいはラティスというのは，ある種の“演算が指定された集合”すなわち“代数系”であって，近ごろよく話題になるブール代数もその1種である．本書では，この代数系および一般の集合について，ごく基本的な事実とごく基本的な考え方を紹介する．これを理解するためには，数学上の予備知識をほとんど要しない．ごく一部分で“極限”の考えと“数学的帰納法”を用いているのが，数学上の手段の最高限度である．

しかし，これは入門書であって通俗書ではないから，多少の積極性を読者に期待する．基本的な考え方を紹介するからには，たとえば，きびしい論理性を示すこともあるが，そのような箇所を初心者が理解するには，いくらか読みなおし，考えなおすことが必要になるかもしれない．

本書にはいわゆる練習問題を設けない．しかし，ある程度まで話が進んでからは，推論や計算の途中をわずかに省略する箇所が散在するようになる．それを補うことが多少の練習になるであろう．また，考えの自然な流れを重んじて，物語りのように話を進めるので，記述の形式が定理・証明の系列というように整理されてはいないし，一般論と特殊な場合の考察とを交互に行なっている部分もある．これらを整理しながら読むことは，良い練習になるであろう．

久しく絶版になっていた旧著の“束論”は，河出書房から共立出版株式会社へ版権が引き渡され，全面的な改訂の上でここに再生することになった．改訂に際して，語法と体裁をあらため，内容の細部にも手を入れたが，題材や配列には変更を加えなかった．最初に述べたような趣旨の入門書としては，特に新

しい題材を加える必要もないし，配列にも十分に想を練ってあったと思うのである．

昭和41年9月

著者しるす

目　　次

第1章　集　　合

第2章　順序集合とラティス

第3章　ラティスの一般論

第4章　Zorn の lemma

第5章 分配的なラティスとブール代数

第6章 moduar ラティス

第1章 集　　合

§1. 集合および関数

いうまでもないことであるが，数学の対象は数や図形だけに限られていない．一般にいかなる物でも考察の対象にすることができるとさえいいうる．ただ，ある物とある物とが同一の物であるか否かが，少なくも原理的には決定されることが要求される．この判別は実際的には行ないにくいことが多いが，実際に判定されるか否かは，それらの物を考察の対象とすることの妨げにはならない．

さて物を表わすのに種々の記号，主として文字が用いられる．a が，あるいは物 a が，かくかくの性質を持つというのは，a で表わされた物がその性質を表わすということであって，文字 a そのものについて述べているのではない．文字 a と文字 b とが同一の物を表わすということを $a=b$ で表わし，相異なる物を表わすことを $a \neq b$ としるす．物を表わす記号あるいは文字は，必ずしもある特定のただ1つの物を表わすとは限らない．たとえば特定の人を表わすのに，その人の姓名を用いるのに対して，“日本人”とか“人”とかのように特定の範囲に属するか，または全然範囲を限定しない，不定の物を表わすことがある．この場合その記号あるいは文字を**変数**という．変数といえば，いかにも数にだけ限定されているようで，良い術語ではない．外国語の variable のほうが優秀であろう．変数 a が表わす物の範囲が限定されているときに，その範囲を a の**変域**という．

上に用いた“範囲”に相当する数学上の概念に“**集合**”(set, Menge, ensemble) がある．実生活上に物の集まりを1つの物として取り扱う例は数多い．たとえばコーヒー・セットといえば，個々の さら とかカップを指しもせず，また，それら一般という不定物を指すのでもなく，1そろいにまとめ上げられてできた新しい“1つの物”を指す．また世帯とか法人とかのような，人間の集まりもある．これらはいずれもある組織を持っている集団であって，同一の構成人員を持っていても，たとえ

ば法人は幾通りもできよう．また，ある世帯の人々が，それだけで1つの会社を作ることもあるかもしれないが，その世帯と会社とは別の物である．すなわち構成要素が全く同一であっても，その構成のしかたによって違う集団と考えられるのが普通である．

集合とは，その集まり方を問題とせずに，範囲の確定した物の集まりを1つの物と考えたとき，その“1つの物”をいうのである．その範囲内の個々の物をその集合の**元**（element）という．元は“ゲン”と読む．x が集合 A の元であることを $x \in A$ で表わし，x が A に**属する**という．また $A \ni x$ ともしるす．$x \in A$ の否定を $x \notin A$ または $A \not\ni x$ で表わす．

集まり方を問題にしないというのは，集合 A と集合 B が同じ元から成るときに A と B を同一の集合と考えることである．すなわち

いかなる x をとっても，　$x \in A$　ならば　$x \in B$,
逆に $x \in B$　ならば　$x \in A$

ということをもって，集合の一致 $A=B$ の定義とするのである．

この意味で集合は組織されていない集団，いわば烏合の衆であるが，しかしその元の範囲は確定していて日和見を許さない．すなわち A が集合であるためには，いかなる x をとっても $x \in A$ であるか否かが1意的に決定されなければならない．もとより，個々の x と個々の A についてその判定を実際にすることは，多くの場合すこぶる困難であるが，少なくとも原理的には決定されていることを要求するのである．たとえば十分大きな数の集合というものは考えないのである．

さて集合はその元を指定すれば定まってしまうから，たとえば a, b, c などが定まったとき，これらを元とし，そのほかに元を持たない集合は1意的に定まる．それを $\{a, b, c, \cdots\cdots\}$ で表わし，

a, b, c, …… から成る集合
a, b, c, …… の全体

などという．特に $\{a, b\}$ の形の集合を**対**（pair）という．したがって $\{a, b\}=\{b, a\}$ である．上の …… が何を意味するかは，明白にわかっていなければ，そのような記号で1つの集合を示すことはできない．たとえば $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ が自然数の全体を表わすことには，よほど意地悪く考える人でなければ同意するであろうが，$\{8, 3, 7, \cdots\cdots\}$ がどう

いう集合を表わすかは見当がつかない．

有限個しか元を持たない集合を**有限集合**といい，たとえば自然数の全体 $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ のように無限に元のある集合を**無限集合**という．前者を表わすのに，その元を枚挙して $\{a, b, c, d\}$ のように完結した形で示すことは，手間さえかければできようが，無限集合では，このあいまいな……なしに示すことはできない．そこで，枚挙するという，いわば下から作っていく方法に代わって，何か，いわば上から範囲を限定してしまう方法がほしくなる．

集合の元を指定するために，ある条件を考えて，それを満たす物として指定することもできよう．1つの variable に関する条件 φ が与えられたとき，x が φ を満たすことを $\varphi(x)$ で表わすとして，φ を満たす x の全体を $\{x|\varphi(x)\}$ で表わす．いかなる集合もこの形で表わされる．たとえば集合 A が与えられたとき，φ として“A に属する”という条件をとればよい．ところで，この形の記号が ある集合 を表わしうるためには，いかなる x に対しても，$\varphi(x)$ か否かが定まっていなければならない．しかし一般には，これが原理的には定まっていると考えられる場合でも，これを実際に判定する手段は なかなか みつからない．その条件を満たす x が存在するか否かさえわからない場合が多い．

そのような x が存在しない場合にも，$\{x|\varphi(x)\}$ が集合を表わすとしたらどうか．それは全然元を含まない場合であろう．またそのような x がただ1つしかない場合には，その集合はただ1つの元しか持たないであろう．いずれも物の“集まり”としては考えにくい物であるが，しかし，与えられた条件 φ の性質がよく知られていないときに，いちいち“その集合が存在すれば”とただし書きを付けて議論することを避けて，全然元を持たない集合および，ただ1つの元しか持たない集合も考えることにする．

元を持たない集合を**空集合**という．集合の一致の規定をこれにも適用すれば，すべての空集合は一致する．それを $\emptyset$ で表わす．ただ1つの元 a だけから成る集合は，前の記法にならって $\{a\}$ で表わされる．この集合は a 自体とは区別されなければならない．たとえば次のような例がある．われわれは集合をもまた1つの物と考えるのであるから，集合を元とする集合も考えられる．そこで，相異なる物 b, c をとって，

$a=\{b, c\}$ と置こう．a は2つの元を持つが $\{a\}$ はただ1つの元 a しか持たないから，確かに a と $\{a\}$ とは相異なる．実生活に例を求めれば，$\{a\}$ と a との区別は1人世帯とその世帯員のようなものであろう．

さて対は集合であるから，$\{a, b\}$ と $\{b, a\}$とは，文字の順序が異なるにもかかわらず，同一の物を表わしている．これに反して文字の順序も考えに入れた物を**順序対**（ordered pair）という．順序対を $\langle a, b\rangle$ で表わそう．順序対の相等 $\langle a, b\rangle=\langle c, b\rangle$ は

$$a=c \quad \text{かつ} \quad b=d$$

であることとして規定される．したがって一般には，$\langle a, b\rangle$ と $\langle b, a\rangle$ とは異なる．一致するのは $a=b$ の場合だけである．

こういう説明では，“順序対を表わす記号を定めただけで，順序対とは何であるかを定めていない”という非難もあろう．実は順序対の間の相等について上の条件が成立しさえすれば，順序対は何物でもかまわないのである．数学者にとって重要なのは，個々の物が何であるかではなく，物と物との関係である．

そこで，上の条件を満たす物 $\langle a, b\rangle$ を，集合の概念に基づいて，ひとまず“定義”してみよう：

定義　　$\langle a, b\rangle=\{\{a\}, \{a, b\}\}$

この定義では，まず a と b から集合 $\{a\}$ と集合 $\{a, b\}$ を作る．次に $\{a\}$ と $\{a, b\}$ から，集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ を作って，これを順序対 $\langle a, b\rangle$ とよぶ．順序対について最初に述べた説明に比べると，いかにも人工的な定義である．

順序対の相等についての前記の条件がこの定義のもとで成立することは，容易に検証される．

関数（函数）は集合と並んで基本的な概念であるが，これについても集合の概念に基づいて人工的な定義をすることができる．まず原始的な定義を述べておく：

ある variable x の1つの値を指定すれば，ある variable y の1つの値がそれに応じて定まるような法則が与えられたとき，1つの関数が与えられた，または y がこの法則によって x の**関数**であるといい，x の1つの値 a に応じて定まる y の値を，a における**関数値**という．また x の変域をその関数の**定義域**という．関数を表わすのに f, g などの文字

を用い，x における f の値を表わすのに $f(x)$ としるすのが普通である．関数 f, g が同一であるというのは，それらの定義域が一致し，かつその定義域の中の任意の x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つことである．すなわち x に応じて y を定める法則そのものでなくして，y の定まり方——法則の結果——が関数なのである．

原始的に定義された関数 f が与えられたときに，$\langle f(x), x\rangle$ なる形の順序対，ただし x は f の定義域の中にあるとして，そのような順序対の全体 F を考えよう．この F は関数 f によって1意的に定まり，f を定める法則のさまざまな与え方にはかかわらない．F は次の性質を持っている：いかなる u をとっても，$\langle v, u\rangle\in F$ なる v は（全然存在しないか，またはあっても），高々1つしかない．すなわち

$\langle v, u\rangle\in F$ かつ $\langle w, u\rangle\in F$　ならば　$v=w$ である．

上のような v の存在する場合が，u が f の定義域に属するときであり，そのとき $v=f(u)$ である．

逆に上のような性質を持つ集合 F に対して，

"$\langle v, u\rangle\in F$ なる v が存在するような u の全体を定義域とし，この v を u に応ずる関数値とする"

という法則で，1つの原始的な意味での関数が定まる．

それゆえ関数の概念の人工的な定義として，"順序対だけを元とする集合であって，上のような性質を持つ F" ということができる．これにならって，更に基本的な **対応** の概念を定義すれば，対応とは順序対だけを元とする集合のことであるといえよう．$\langle y, x\rangle$ が対応 K の元であるとき，y は x に対応するという．"x と y との間にこれこれの関係があるときに，y を x に対応させる" というのは，その関係のあるような x と y とで作られた順序対 $\langle y, x\rangle$ の全体を考えるということである．

§2. 部分集合と集合算

A と B とが集合であって，

いかなる x に対しても，　$x\in A$　ならば　必ず $x\in B$

であるときに，A は B の**部分集合**であるといい，B が A を**含む**という．これは，A の元がすべて B の元であるということであって，いわ

ば A より B が大きな集合であるか，または $A=B$ であることであるから，数の大小を表わす記号に丸みをつけた記号 ⊃ を使って，$A \subseteqq B$ で表わそう．またそれを $B \supseteqq A$ ともしるす．

この関係 $\subseteqq$ を集合の**包含関係**という．それが次の性質を持っていることは定義から直ちに知られよう：いかなる集合 A, B, C をとっても

$$A \subseteqq A,$$

$$A \subseteqq B \text{ かつ } B \subseteqq A \quad \text{ならば} \quad A=B,$$

$$A \subseteqq B \text{ かつ } B \subseteqq C \quad \text{ならば} \quad A \subseteqq C.$$

これらをそれぞれ，集合の包含関係が**反射的**（reflexive），**反対称的**（asymmetric），**推移的**（transitive）であるといい表わす．reflexive および transitive はわかりやすいが，asymmetric には少々説明がいるであろう．$A \subseteqq B$ かつ $A \neq B$ なるとき，A は B の**真の部分集合**であるといい，$A \subset B$ または $B \supset A$ で表わす．asymmetric であるという性質は，$A \subset B$ と $B \subset A$ とが両立しないことを意味するのである．

空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合であることが，次のようにして証明される．証明すべきことは，任意の集合 B をとったとき，$\emptyset$ が B の部分集合であること，すなわち，任意の x に対して

（i）　　　　$x \in \emptyset$　ならば　$x \in B$

ということである．（i）の対偶をとって

（ii）　　　　$x \notin B$　ならば　$x \notin \emptyset$

といってもよい．そこで，$x \notin B$ を仮定して，$x \notin \emptyset$ を確かめることになるが，空集合の定義から確かに $x \notin \emptyset$ である．（証明終）

この議論は少々詭弁的にみえるかもしれないが，数学における“ならば”ということばの，次に述べるような性格を示している：

条件 φ, ψ のうち φ がどの x についても成立しているとき，

（iii）　　　　$\psi(x)$　ならば　$\varphi(x)$

はいかなる x に対しても成立する．

これが成立すると考える理由は，（ii）について述べたと同様であって，$\varphi(x)$ は $x \notin \emptyset$ に相当する．

条件 ψ にかかわりなく φ が満たされるのに，“ψ ならば φ”と述べるのは，奇妙な感じがするかもしれない．しかし，次の形式の推論はごく普通の推論であろう．

$\left\{\begin{array}{l}\alpha \quad \text{ならば} \quad \beta \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \quad \text{でなくても} \quad \beta \\ \qquad\qquad \text{したがって，必ず } \beta\end{array}\right.$

この推論で，結論が出てから“α ならば β”を見直すと， 前記の場合の“ψ ならば φ”と同様な状態になっている．奇妙な感じがしても，以前の（iii）を許容するほうが，論理は簡単になるのである．

上の場合の（iii）を， 数学では，“trivial に成立する”といっている．また，（ i ）に相当して

条件 φ，ψ のうち φ が決して満たされないとき，

（iv） $\varphi(x)$ ならば $\psi(x)$

はいかなる x に対しても成立する．

実際，（iv）の対偶をとってみれば事情は明白であろう．この場合の（iv）も，“trivial に成立する”というならわしである．$\{x|\varphi(x)\}$ および $\{x|\psi(x)\}$ を考えてみれば， これは空集合がすべての集合の部分集合であるということと同値である．

ついでに部分集合の概念と元の概念とが異なることに注意しよう．実際，集合 $\{1, 2\}$ の部分集合は$\emptyset$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$ の 4 個であるが，元は 1 および 2 であり，それらは $\{1\}$ とも $\{2\}$ とも概念上区別されている．

ここで 2 個の元から成る集合の部分集合が 4 個であることを知ったが， 一般に n 個の元から成る集合の部分集合は 2^n 個あることを示そう．

その集合を $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ とすれば，その部分集合は a_1 を元とするか否かで 2 種類に分かれる．更に a_2 を考慮に入れ ば 2^2 種類にと進んで，結局 a_n まで考慮に入れると 2^n 種類に分かれる．しかし，各々の a_i について，それを元とするか否かが定まっていれば，部分集合は一定してしまうから，これら 2^n 個の種類はそれぞれ，ちょうど 1 つずつの部分集合を表わしている．

一般に集合 A に対して，A のあらゆる部分集合から成る集合

$$\{X \mid X \subseteq A\}$$

を A の**ベキ（冪）集合**といい，2^A で表わすが， これは上に述べた有限集合の元の個数のことを考えれば記憶しやすい定義であろう．ベキ集合は次に定義する 2 つの演算 $\cup$ および $\cap$ で“閉じている”．

任意の集合 X, Y に対して, X と Y との共通な元の集合

$$\{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$

を $X \cap Y$ で表わし, X と Y の**共通部分** (intersection, Durchschnitt) という. また X と Y の少なくも一方に属する物の全体

$$\{x \mid x \in X \quad \text{または} \quad x \in Y\}$$

すなわち X, Y の元を一まとめにしてできた集合を $X \cup Y$ で表わし, これを X と Y との**合併集合**, または**和集合** (sum, set-sum, Summe, Vereinigungsmenge) という. 図1.1では X, Y をそれぞれ円の内部で表わしてみた.

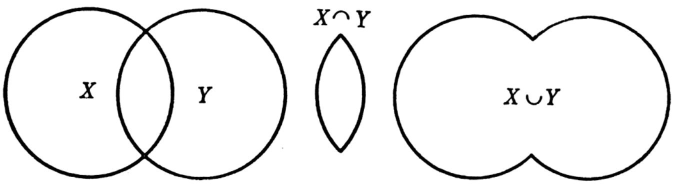


図 1.1

$X \cup Y$ は

(v) $$X \subseteqq Z \text{ かつ } Y \subseteqq Z$$

なる集合 Z の中で"最小"なものである. すなわち, (v)のような Z に対して必ず $X \cup Y \subseteqq Z$ であり, また $X \cup Y$ 自身は (v) のような Z の1つである.

同様に $X \cap Y$ は

$$X \supseteqq Z \text{ かつ } Y \supseteqq Z$$

なる集合 Z の中で"最大"なものである. このことはまた, $X \supseteqq Z$ かつ $Y \supseteqq Z$ であるためには $X \cap Y \supseteqq Z$ が必要かつ十分である, ということもできる. ベキ集合 2^A がこれらの演算で**閉じている**とは,

$$X \in 2^A \text{ かつ } Y \in 2^A$$

$$\text{ならば} \quad X \cup Y \in 2^A \text{ かつ } X \cap Y \in 2^A$$

であるという意味である.

ベキ集合のように, 集合であってその元もすべて集合であるようなものを一般に**集合族**というが, 集合族 F が演算 $\cup$ および $\cap$ に関して閉じているとき, F は**集合ラティス**をなすという. 集合ラティスは, 後に

定義を与え，この書の主題となる一般のラティスの概念の，特殊かつ重要な例である．

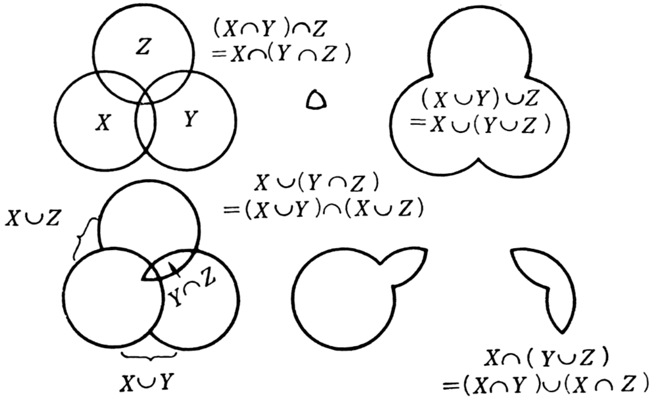


図 1.2

さて，これらの演算に関して次の諸法則があることは，容易に認められる．図 1.2 も参照されたい．

交換律： $X \wedge Y = Y \wedge X$,

$X \vee Y = Y \vee X$

結合律： $(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$,

$(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$

吸収律： $X \wedge (X \vee Y) = X$,

$X \vee (X \wedge Y) = X$

分配律： $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$,

$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

いうまでもないことであろうが，$(X \wedge Y) \wedge Z$ はまず $X \wedge Y$ なる結合を行ない，その結果をたとえば $U = X \wedge Y$ とすれば，$U \wedge Z$ なる結合を行なうことを意味する．一般に“カッコの中を先に読む”のである．しかし結合律によって $X \wedge Y \wedge Z$ や $X \vee Y \vee Z$ のどこにカッコを入れても同じ物を表わすから，簡単のためにしばしばそれを省く．ただし $\vee$ と $\wedge$ とが同じ式に現われる場合には省くわけにはいかない．一般に $X_1 \vee X_2 \vee \cdots\cdots \vee X_n$ や，$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots\cdots \wedge X_n$ においても，カッコを省いてかまわないことが直ちに納得されるであろう．

これらの法則において $X \cup Y$ を $X+Y$, $X \cap Y$ を XY で置き換えてみれば，分配律の第2式と吸収律とを例外として，数の演算についての普通の法則と同じ形の式が得られるであろう．

数の演算における差に対して，集合の演算においても**差集合** $X-Y$ を次のように定義する．X, Y が集合であるとき，Y に属さない X の元の全体

$$\{x \mid x \in X \text{ かつ } x \notin Y\}$$

を X, Y の差集合（difference）といい，$X-Y$ で表わす（図1.3参照）．

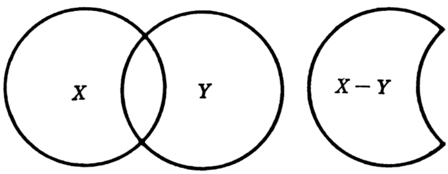


図 1.3

自然数の範囲で差 $m-n$ を作るのには m が n より大きいという条件が必要で，この演算を無制限に行なうためには0および負数を導入する必要があった．集合算においては，負の集合を考えることはないが，上の算法を無制限に行なうためには（ただ1つの元から成る集合および）空集合 $\varnothing$ の導入が必要である．たとえば常に

$$X-X=\varnothing$$

である．一般に

$$X \subseteq Y \quad \text{ならば} \quad X-Y=\varnothing$$

であり，またその逆も成り立つ．ここにも“にせもの”の集合 $\varnothing$ を導入した理由がある．

特に $X \supseteq Y$ のときに，差集合 $X-Y$ を X に関する Y の**補集合**（complementary set）という．このとき容易にわかるように

$$X=(X-Y) \cup Y$$

が成立するが，和集合の記号 $\cup$ を記号 $+$ で置き換えてみれば，再び普通の算術の等式が現われる．これが差集合の名と記号の由来であるが，条件 $X \supseteq Y$ がないと $(X-Y) \cup Y$ は必ずしも X に一致せず，一般には

$$(X-Y) \cup Y=X \cup Y$$

となる．この等式と

$$(X-Y)\cap Y=\emptyset$$

は，定義から容易に導かれる．

集合算における $X\cup Y$, $X\cap Y$ と数の和，積との類似性はすこぶる不十分である．たとえば，上の２つの等式に相当する

$$(X-Y)+Y=X+Y,\quad (X-Y)Y=0$$

は，数については一般には成立しない．もっと良い類似を与える集合算は後に一般ブール代数のところで述べることにして，次に演算 $X\cup Y$, $X\cap Y$ の拡張を紹介しよう．

§3. 超限的集合算

A, B から $A\cap B$ を作ることを繰り返すと，有限個の集合

$$X_1,\ X_2,\cdots\cdots,\ X_n \tag{1}$$

——各 X_i は有限集合でも無限集合でもよい——が与えられたとき

$$X_1\cap X_2\cap\cdots\cdots\cap X_n \tag{2}$$

を作ることができる．

これを更に，無限個の集合が与えられた場合にまで拡張しようとするのであるが，そうすると，“与えられた”ということの意味を考えなおさねばならない．（１）の項は１つ１つ眼前に並べられているか，あるいは，必要に応じて並べてみせることができるわけであるが，無限個ではそうはいかない．

与えられたということには，

（ａ） 相互に無関係に１つの全体として，すなわち１つの集合族の元として与えられた

という場合もあろうし，（１）の例のように，

（ｂ） ある順で与えられた

という場合もあろう．（ａ）の場合として，たとえば集合 X, Y, Z が与えられたというのは，集合族 $\{X,\ Y,\ Z\}$ が与えられたことにほかならない．

（ｂ）の場合の例とした 列（１）では，記号 X_i について

i は 変域 $\{1,\ 2,\cdots\cdots,\ n\}$ の variable,

X は関数記号，X_i は i における X の値

と考え，（１）における順序とは i の変域における大小関係であると考

えてもよいであろう．そこで，（b）の解釈としては

(b′) 関数が与えられた

という解釈を採用する．ただし，その関数は集合を値とする関数——**集合値関数**という——である．

一般に，α は variable とし，与えられた集合値関数の α における値を X_α としよう．また，α についての条件が与えられたとして，これを $\varphi(\alpha)$ で表わそう．条件 $\varphi(\alpha)$ のもとでの X_α の共通部分 $\bigcap_{\varphi(\alpha)} X_\alpha$ とは，集合

$$\{x \mid \varphi(\alpha) \text{ を満たす すべての } \alpha \text{ に対して } x \in X_\alpha\}$$

のことであると定義する．また，条件 $\varphi(\alpha)$ のもとでの X_α の合併集合 $\bigcup_{\varphi(\alpha)} X_\alpha$ とは，集合

$$\{x \mid \varphi(\alpha) \text{ を満たす ある } \alpha \text{ に対して } x \in X_\alpha\}$$

のことであると定義する．たとえば（1）で

$$\bigcap_{\iota<3} X_\iota = X_1 \cap X_2, \qquad \bigcup_{\iota<3} X_\iota = X_1 \cup X_2$$

さて，条件 $\varphi(\alpha)$ を満たす α をすべて考え，それらの α に対応する X_α の全体を

$$\{X_\alpha \mid \varphi(\alpha)\}$$

で表わそう．これは1つの集合族である．これを用いると，共通部分の定義における

$$\varphi(\alpha) \text{ を満たす すべての } \alpha \text{ に対して } x \in X_\alpha$$

という条件は

$$\{X_\alpha \mid \varphi(\alpha)\} \text{ のすべての元 } Y \text{ に対して } x \in Y$$

といい換えられる．また，合併集合の定義における

$$\varphi(\alpha) \text{ を満たす ある } \alpha \text{ に対して } x \in X_\alpha$$

という条件は

$$\{X_\alpha \mid \varphi(\alpha)\} \text{ の ある元 } Y \text{ に対して } x \in Y$$

といい換えられる．それゆえ，集合値関数が与えられた場合の共通部分と合併集合の定義は，集合族に関する次の定義に吸収される．

集合族 F の共通部分 $\bigcap F$ とは，F のすべての元に共通な元の全体，すなわち

$$\bigcap F = \{x \mid F \text{ のすべての元 } Y \text{ に対して } x \in Y\}$$

である．また，合併集合 $\bigcup F$ とは，F の元の元の全体，すなわち

$$\bigcup F=\{x \mid F \text{ の ある元 } Y \text{ に対して } x \in Y\}$$

である．[1]

この定義によれば，

$$Z \in F \quad \text{ならば} \quad \bigcap F \subseteqq Z \text{ かつ } Z \subseteqq \bigcup F$$

である．また集合 A，B について

$$Z \in F \quad \text{ならば} \quad A \subseteqq Z \text{ かつ } Z \subseteqq B$$

であったとすると，A の任意の元は $\bigcap F$ に属し，また $\bigcup F$ の任意の元は B に属する．すなわち $A \subseteqq \bigcap F$，$\bigcup F \subseteqq B$ である．この意味で $\bigcap F$ および $\bigcup F$ は，それぞれ上の性質を有する集合 A，B の中で最大，最小のものである．

特に集合族 F が有限集合 $\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\}$ であるときに

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots\cdots \cup X_n=\bigcup F,$$
$$X_1 \cap X_2 \cap \cdots\cdots \cap X_n=\bigcap F$$

と定義すれば，以前の定義と一致することが知られよう．結合律に相当するものは次の簡単に証明される定理である：

集合族 S のすべての元が再び集合族であるとき，$G=\bigcup S$ と置けば

$$\bigcup G=\bigcup\{\bigcup F \mid F \in S\}, \quad \bigcap G=\bigcap\{\bigcap F \mid F \in S\}$$

ただし，$\bigcup$ および $\bigcap$ はいずれも集合値関数と考えられるから，前の記法 $\{X_\alpha \mid \varphi(\alpha)\}$ にならって $\{\bigcup F \mid F \in S\}$，$\{\bigcap F \mid F \in S\}$ によって S の元の合併集合の全体，S の元の共通部分の全体を表わしたのである．

これを証明するために，x が左辺に属するということの意味を順に考えていけば自然に，x が右辺に属することと同等であることがわかる．しかし，後に一般の“順序集合”について同様な等式が証明されるであろう．

さて上の定義で F は集合族であるとしたが，その意味は F の元がすべて集合であること，すなわち x が F の元ならば x が集合であることであった．いま F として空集合をとれば，このことは trivial に成立している．そこで，$\emptyset$ の合併集合を考えれば，いかなる x をとっても，$x \in Y$ なる $\emptyset$ の元 Y どころか，およそ $\emptyset$ の元 Y なるものは存

1) これらの記法 $\cap F$，$\cup F$ は数学者一般の習慣と少し違う．

在しないのであるから，$x \notin \bigcup\emptyset$ である．ゆえに $\bigcup\emptyset=\emptyset$ である．次に $\bigcap\emptyset$ を考えよう．“$\emptyset$ のすべての元 Y に対して $x \in Y$”ということは，“$Y \in \emptyset$ ならば $x \in Y$”であるということであるから，7ページの(iv)の場合に相当して x が何であっても trivial に成立する．すなわち $\bigcap\emptyset$ はおよそ考えられるあらゆる物から成る集合である．

しかし集合論は，かように巨大な集合の存在を認めることによって，ほとんど致命的な矛盾に遭遇した．それを紹介することは本章の目的を越えるから省略するが，ただ集合概念や“属する”という概念の定義が相当に粗雑であったことは断わっておこう．範囲の確定した物の集まりを1つの物として考え“うる”とき，その1つの物を集合というとでも，注意深い人はいうであろうが，そう考え“うる”ときはいつであるかを規定しなければ，何の実際的な意味もない．

今日の精密化され，いままでに知られた矛盾を排除しえた集合概念の構成は本書では紹介すまい．ただ上に表われた巨大な $\bigcap\emptyset$ を，今日許された集合に局限する方法だけを述べよう．

われわれが空集合 $\emptyset$ を集合族と考えて取り扱うときは常に，ある未知の集合族，あるいは不定の集合族 F が偶然 $\emptyset$ に一致した場合を考慮するのであって，variable F の元はすべて（F に無関係に）一定な集合 S の部分集合なのである．ある元 x が $\bigcup F$ または $\bigcap F$ に属するか否かをいうとき，x は全然一般な物ではなく，S の元なのである．$\bigcup F$ は常に S の部分集合であり，$F \neq \emptyset$ ならば $\bigcap F \subseteqq S$ であるから，それらの場合には S をいちいち表面に出すのは無用な繁雑さを招くので，何も断わらないが，$F=\emptyset$ の場合および，$F \neq \emptyset$ がいわれていない場合に $\bigcap F$ について考えるときは，

S の元であって F のすべての元の共通元となっているもの

の全体を考える意味で，“S の部分集合の族としての F”の共通部分，または“S の部分集合としての” $\bigcap F$ といえばよい．もし $F=\emptyset$ ならば，それは S である．

第2章　順序集合とラティス

§4. 順　序　集　合

われわれは日常ひんぱんに，ある性質の多少を2つの物について比較し，物を順序づけることをしている．その比較は不可能であることもあろう．たとえば人間の“偉大さ”などという多くの面を持つ性質について2人の人を比較すれば，同質または同程度の偉大さを持つわけでもないが，しかも兄たりがたく弟たりがたいことが起こる．比較可能で，しかも同程度でない場合の判定は“a は b よりも……である”という形になろう．それを $a<b$ で表わしたとすれば，次の法則が行なわれることが普通であろう：

i）$a<a$ なることは決して起こらない，

ii）$a<b$ かつ $b<c$　ならば　$a<c$

もし“a と b とは全く同程度に………である”という判定を $a\sim b$ で表わせば，次の法則も普通は承認されよう：

反射律：　$a\sim a$,

対称律：　$a\sim b$　ならば　$b\sim a$,

推移律：　$a\sim b$ かつ $b\sim c$　ならば　$a\sim c$.

これらの法則を，関係$\sim$（2つの物の間の関係であるから，$<$ についてもであるが，2項関係といわれる）が reflexive, symmetric, transitive であるとそれぞれいう．前のii）も1つの推移律である．そしてこの3法則が成立する2項関係を，それが何を意味する関係であっても，**同値関係**, equivalence または equivalence relation であるという．同値関係の特徴は，次の“類別”ができることにある．

集合 A において1つの同値関係$\sim$が定義されているとして，すなわち，A のいかなる元 a, b についても，$a\sim b$ か否かが定まっているとして，$a\sim b$ のとき a に b が**同値**であるということにする．a に同値な元の全体を $C(a)$，すなわち

$$C(a)=\{x \mid x\in A,\ a\sim x\}$$

とし，この形に表わされる集合 $C(a)$，$C(a')$ などを類という．また a を類 $C(a)$ の代表という．反射律によって

$$a \in C(a) \tag{1}$$

であるから，A の各元は ある類に属する．

また対称律によって

$$b \in C(a) \quad \text{ならば} \quad a \in C(b). \tag{2}$$

推移律によって

$$b \in C(a) \quad \text{ならば} \quad C(b) \subseteqq C(a). \tag{3}$$

法則（2），（3）を組み合わせると，$b \in C(a)$ のとき $C(a) \subseteqq C(b)$ も導かれ，結局

$$b \in C(a) \quad \text{ならば} \quad C(a)=C(b). \tag{3$'$}$$

ゆえに類の各元がその類の代表になるから，類の1つの元を指定すればその類が定まってしまう．したがって，相異なる類には共通元がない：

$$C(a) \neq C(a') \quad \text{ならば} \quad C(a) \frown C(a') = \emptyset.$$

以上のことから，集合族 $\{C(a) \mid a \in A\}$ は次の意味で A の類別であることがわかる．

集合 A の**類別**とは，次の2条件 a)，b) を満たす集合族 D をいう：

a) $A = \bigcup D$.

b) $X \in D$, $Y \in D$, $X \neq Y$ 　ならば　 $X \frown Y = \emptyset$.

類別が与えられたとき，それの元を**類**という．

上では同値関係から類別を作ったが，逆に集合 A の類別 D が与えられたとき，a と b が D について同じ類に属することを $a \sim b$ で表わせば，この $\sim$ が1つの同値関係になって $\{C(a) \mid a \in A\}$ が D に一致することは明らかである．

さて前にもどって，以前の比較の意味で $\sim$ および $<$ を考えれば，

$$a \sim a', \quad a' < b, \quad b \sim b'$$

が同時に成立するとき，$a < b'$ となることは承認されよう（これは数学的な事実ではなくて，普通に行なわれる比較の常識的法則である）．このことから，"$a<b$ または $a \sim b$" であるという関係を $a \lesssim b$ で表わせば，この関係が transitive であることが結論される．2項関係 $\sim$ が reflexive であるから $\lesssim$ も reflexive である．

一般に reflexive かつ transitive な2項関係を**擬順序** (quasi-order) という．

いま上の比較の意味を離れて，また記号 $<$ と記号 $\sim$ との組合せとしてでなく，まったく一般に1つの quasi-order $\lesssim$ が，ある集合 A において定義されているとする．すなわち A のいかなる元 a, b をとっても，$a \lesssim b$ であるか否かが1意に定まるものとする．このとき

$$a \lesssim b \text{ かつ } b \lesssim a$$

を $a \equiv b$ で表わせば $\equiv$ は A において定義された1つの equivalence である．したがって，それは A の1つの類別 D を与える．その元，すなわち類はそれに属する A の1つの元 a によって

$$C(a) = \{a' \mid a \equiv a',\ a' \in A\}$$

として定まり，$a \equiv a'$ ということは a と a' が同じ類に属するということである．ところで

$$a \equiv a', \quad a \lesssim b, \quad b \equiv b'$$

とすれば，$\equiv$ の定義により $a' \lesssim a$, $b \lesssim b'$ であるから，$\lesssim$ の推移律により

$$a' \lesssim b'$$

となる．したがって，x と y をこの類別 D の元とするとき

　x の ある元 a と，y の ある元 b とについて $a \lesssim b$

という関係は

　x のすべての元 a と，y のすべての元 b とについて $a \lesssim b$

という関係と同じことになる．この関係を $x \leqq y$ で表わそう．

D において定義されたこの2項関係は明らかに1つの擬順序であるが，更にそれは asymmetric である．すなわち

反対称律：　$x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ 　ならば 　$x = y$.

一般に，reflexive かつ asymmetric かつ transitive な2項関係を**順序** (order あるいは partial order) という．

ふたたび以前の比較の場合にもどって，$\lesssim$ を "$<$ または $\sim$" と読むことにすれば，上に導入した同値関係 $\equiv$ が実は同値関係 $\sim$ と同じものになる．ゆえに，それによる類別のおのおのの類は "まったく同程度に………である" ものをひとまとめにした集合であり，いわば "………である程度" に応ずるものである．すなわち類別を作る過程は，たとえ

ば ある人が ある人よりも偉大である，または同じように偉大であるという比較から，“偉大さ”という概念を抽象することに相当している．

ある集合 L において順序 $\leqq$ が定義されているとき，L は $\leqq$ によって順序づけられるという．集合 L と順序 $\leqq$ とをあわせ考えたものを**順序集合**といい，$(L, \leqq)$ で表わす．順序集合は組織づけられた集合であって，本来の集合とは概念上異なるのであるが，いかなる順序 $\leqq$ をあわせ考えているかが明らかなときは $(L, \leqq)$ を単に L とも書く．順序集合 $(L, \leqq)$ の元，部分集合とはそれぞれ L の元，部分集合の意味である．順序集合 $(L, \leqq)$ の部分集合 M はまた L における順序 $\leqq$ によって順序づけられた集合 $(M, \leqq)$ と考えられる．$(L, \leqq)$ の，あるいは L の**部分順序集合** M というときは，この順序集合 $(M, \leqq)$ を指す．

順序 $\leqq$ が与えられたとき，

$$a \leqq b \text{ かつ } a \neq b$$

を $a < b$ で表わす．したがって $a \leqq b$ は“$a < b$ または $a = b$”と同等である．順序 $\leqq$ は asymmetric であるから，$a < b$ と $b < a$ とは両立しない．この性質が，前にもしるした，反対称律 asymmetric なる語の由来である．また

$$a < b \text{ かつ } b < c$$

であるとき，上の性質によって $a \neq c$ であるが，順序 $\leqq$ の推移律によって $a \leqq c$ であるから

$$a < c$$

となる．すなわち2項関係 $<$ もまた transitive である．

数の大小関係は順序の最も手近な例を与えるものであるから，われわれは，数の大小についての記号 $<$ と $\leqq$ を順序の記号に流用した．同様に，ことばも流用しよう．ある特定の順序だけを考えているとき，それについて $a < b$ ということを

a は b よりも前，　b は a よりも後

a は b よりも小，　b は a よりも大

などと，われわれに親しみのある前後や大小の形式でいい表わす．しかし，数の大小や前後についてわれわれの慣れている法則で，一般の順序については必ずしも成り立たないものがあるから，注意を要する．次に

その例を示そう.

$a \leqq b$ または $b \leqq a$ であるとき, a と b とは (順序 $\leqq$ に関して) **比較可能**であるという.

数の大小関係でわれわれが慣れているように, 任意の2つの物が互いに比較可能であるということは, 一般の順序においては要求されていない. 実際, 集合の包含関係 $\subseteqq$ は順序関係であるが, これについて比較可能でない集合は何組でもみつけることができる. ただし $a \leqq b$ でも $b \leqq a$ でもないということは, a と b の間に順序関係が成立しないということであって, 順序関係を考えるのが無意味であるとか, 順序関係が定義されていないということではない.

特に順序集合 $(L, \leqq)$ のいかなる2元も互いに比較可能であるとき, L は**全順序集合**である, または $\leqq$ は L において**全順序**である, または $\leqq$ は L を全順序づける などという. 全順序の代わりに線型順序ともいう.

全順序でない順序の1例として 集合の包含関係 $\subseteqq$ をあげたが, この包含関係 $\subseteqq$ は, 次に述べるように, 順序関係の中でも標準的なものである.

順序集合 $(L, \leqq)$ の各元 a に対して L の部分集合 $\{x | x \leqq a\}$ を対応させ, これを $\bar{a}$ で表わそう. $a \leqq b$ ならば, 順序 $\leqq$ の推移律によって $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$ であるが, 逆に $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$ ならば, 定義によって $a \leqq b$ である. 特に $\bar{a} = \bar{b}$ ならば, $a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ となるから, $a = b$ である. したがって L における順序関係は, すべて, 集合族 $\bar{L} = \{\bar{a} | a \in L\}$ における集合の包含関係 $\subseteqq$ によって表わされ, $(L, \leqq)$ と $(\bar{L}, \subseteqq)$ とは, その元の個性を無視して単に順序のみに着目すれば, 同じ構造を持った順序集合と考えられる.

同じ構造を持った順序集合という考えは, 次の順序同型の概念によって明確に規定されよう. 順序集合 $(L, \leqq)$ の各元 a に対して順序集合 $(L', \leqq')$ の元 a' が対応し, 逆に L' の各元 a' は, 同じ対応によって, L の ある元 a に対応し

$$a \leqq b \quad \text{ならば} \quad a' \leqq' b'$$
$$a' \leqq' b' \quad \text{ならば} \quad a \leqq b$$

であるとき, この対応は $(L, \leqq)$ と $(L', \leqq')$ との**同型対応**であると

いい，また $(L, \leqq)$ と $(L', \leqq')$ とは（この対応によって）**同型**あるいは**順序同型**であるという．前と同様に，この場合には $a=b$ ならば $a'=b'$ であり，また $a'=b'$ ならば $a=b$ である．

一般に集合 A の元 x と集合 B の元 y との対応 $x \longleftrightarrow y$ において，x を指定すれば対応する y が1意に確定し，y を指定すれば x が1意に確定するとき，この対応は A と B との**1対1** (one-to-one) **の対応**であるという．順序同型対応はその1例である．1対1の対応があるような集合を互いに**対等**であるというが，それは元の個性を無視した全く抽象的な集合として同一であることと考えてよいであろう．有限集合においては，対等であることと元の個数が相等しいこととは一致するから，これを一般化して，有限集合に限らず，対等な集合であるということを，また **"同じ cardinal number を持つ"** ともいう．集合論においては，対等な集合に対して同一に定まるようなある物を cardinal number とよんで，それに関して加法，乗法，ベキ法を適当に規定して，自然数の算術の拡張を行なう．しかし，これは余談である．いまは，このことに立ち入らないことにしよう．

§5. Hasse の図式

集合の包含関係によって順序集合を "表現" することは前節で述べたが，与えられた順序集合が有限集合であるときは，もっと見やすい図形的な表現方法がある．それは，次に述べる Hasse の図式 (diagram) である．

順序集合 L の各元を平面上の点で表わし，$x<y$ ならば x を表わす点の上方に y を表わす点を置き，しかも，$x<z$ かつ $z<y$ ——これを $x<z<y$ と続けて書く——なる z がないときは，点 x と点 y とを線分で結ぶことにする．ただし，このような線分が他の元を表わす点を通らぬように，初めの点の配置をうまくとっておく．このような図を **Hasse の図式**という．たとえば，5個の元から成る集合 $L=\{a, b, c, d, e\}$ において，a および b よりも c, d, e が大，c および d よりも e が大，その

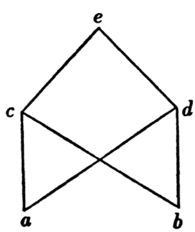


図 2.1

他の組合せでは $\leqq$ が成立しないとして2項関係 $\leqq$ を定義すれば，これは1つの順序を与えるが，それの Hasse の図式は図2.1のようになる．

Hasse の図式の利用価値は，第1に有限順序集合に対しては必ずこのの図式を作りうること，第2に有限順序集合 L の元 x，y の間に $x<y$ が成立するために必要かつ十分な判定条件は，L の Hasse の図式において点 x と点 y とが，点 x から出発して次々に上方に進む線分の列で点 y まで結ばれることであるということにある．これらのことは自明の事実ではあるまい．それを次に証明しよう．

以下，与えられた順序集合 L は有限集合であるとし，a,b,x,y などは L の元を表わすとする．また，$x<y$ であるが，$x<z<y$ なる z がないとき，x は y の**直前の元**，y は x の**直後の元**であるという．

L の元 a が与えられたとして，L の部分集合 A で，全順序集合をなし，かつ a を最大元とするものを考えよう．たとえば $\{a\}$ がその一つである．かような A の元の個数は L の元の個数を越えないから，個数の最大値がある．その最大値を a の**次元**といおう．$a<x$ ならば x の次元が a の次元より大きいことは，上のような A に対して集合 $A\cup\{x\}$ が x を最大元とする全順序集合であることから直ちに知られる．L の元の次元は L の元の個数を越えないから，その最大値がある．この最大値を与える元の1つを a とすれば，もはや，$a<x$ なる x は存在しない．

さて L の元の個数を k とする．$k=1$ なるときは，Hasse の図式が作られることも順序関係の判定条件も自明である．そこで，ある自然数 n に対して，$k<n$ なる場合には既にこれらのことが証明されているとして，$k=n$ の場合に証明すればよい．

上にとった a（次元が最大になるもの）を L から取り除いて得られる順序集合 L' に対して Hasse の図式を作り，その図式に現われる任意の2点を通る直線を考えよう．それらの直線は有限個しかないから，図式の上方に1つの水平な直線を引けば，その上には初めのどの直線上にもない点が見いだされる．そのような点を1つとって，それで a を表わす．L において a の直前の元であるような x に対しては，点 x と点 a とを線分で結ぶ．a のとり方によって，かような線分の上には，もはや他の点はのっていない．L' の図式をこうして拡張したものを L

の図式として考える．L において $x<y$ ならば $x\neq a$ である．したがって x は L' の図式に既に表わされている．$y\neq a$ ならば L' の図式において既に点 x の上方に点 y が置かれており，$y=a$ ならば上の作り方によって同様である．x が y の直前の元であるときにこれらが線分で結ばれていること，またその線分が他の点を通らないことも，同様に容易に知られよう．

さて作り方から離れて，L に対する Hasse の図式が与えられているとしよう．a は上のとおり（それゆえ $a<x$ なる x は存在しない）として $L'=L-\{a\}$ を考える．L に対する図式から点 a および点 a と他の点とを結ぶ線分を取り去れば，L' に対する図式を得ることは明らかである．いま L において $x<y$ であるとして，$y\neq a$ ならば，L' の元の個数は $n-1$ であるから，仮定によって L' の図式の中で既に，点 x から出発して次々に上に進む線分の列で点 y に到達できる．その逆も成立している．$y=a$ の場合に，線分の列で結ばれれば $x<y$ となることは明らかであるが，その逆に $x<a$ ならばそのような線分の列が存在することは，$x\leqq z$ なる a の直前の元 z があることを示せば明らかになる．それには $x\leqq z<a$ なる z（たとえば $z=x$）の次元を考え，その次元の最大値を与えるような z をとればよい．実際，もし $z<u$ ならば z の次元より u の次元が大きいのであるから，もはや $z<u<a$ なる u は存在しない．したがって，この z は求めるものとなるのである．

平面上に適当に点をとり，そのあるものを水平でない線分で結び，その線分が他の点を通らないようにするとき，次々に上方に進む線分の列で点 x から点 y まで結ばれることを $x\leqq y$ で表わせば，これが1つの順序集合を与えることは明らかであろう．

§6. 双　対

順序 $\leqq$ が与えられたとき，$x\leqq y$ をまた $y\geqq x$ で表わせば，$\leqq$ の反射律，推移律，反対称律によって，それぞれ

いかなる x に対しても $x\geqq x$,

$x\geqq y$ かつ $y\geqq z$ ならば $x\geqq z$,

$x\geqq y$ かつ $y\geqq x$ ならば $x=y$

が成立する．すなわち $\geqq$ も1つの順序である．この $\geqq$ を $\leqq$ に**双対な順序**[1] といい，順序集合 $(L, \geqq)$ を，順序集合 $(L, \leqq)$ に**双対な順序集合**という．順序の双対なる関係は**相互的** (reciprocal) である．すなわち，双対な順序に双対な順序はもとの順序である．

順序集合に関する一般理論において，われわれはある順序から出発して，順序に関する条件を与え，条件によって順序に関する概念を定義し，再び概念によって条件を与え，あるいはその間に成立する命題を証明するというような過程を繰り返す．その過程に対して，与えられた順序の代わりに，あらゆる部分で，その双対順序を用いれば，前と同様な理論の過程が確立されるであろう．この新しい過程に現われる条件，概念，命題を，もとの過程においてそれに応ずる条件，概念，命題の**双対** (dual) という．

たとえば条件 $x \leqq y$ の双対は $x \geqq y$ である．また順序集合 L の元 a と部分集合 A との間に，A のすべての元 x に対して $x \leqq a$ であるという関係があるとき，a は A の**上界** (upper bound) であるというが，その双対概念である**下界**[2] (lower bound) は，A のすべての元 x に対して $x \geqq a$ である（すなわち $a \leqq x$）という条件で定義される．A の上界 a で A に属するものがあれば，a は A の**最大元**であるというが，もし b も A の最大元ならば $b \leqq a$ かつ $a \leqq b$ であるから，$a=b$ である．すなわち A の最大元は，存在すれば，ただ1つである．最大元の双対を**最小元**という．上の命題の双対として，1つの集合の最小元は，存在すれば，ただ1つであるということが成立する．

一般に順序に関するある命題が真であれば，その双対命題も真であることは，"双対"の定義から明白である．このことを順序に関する**双対の原理** (duality principle) という．

条件の中には自分自身と双対なものもある．たとえば"x と y とは比較可能である"という条件，すなわち"$x \leqq y$ または $y \leqq x$"はそうである．一般に，自分自身と双対な条件，概念，命題などを**自己双対** (selfdual) であるという．たとえば，全順序集合という概念は自己双対である．自己双対なものばかりで組み立てられたものは，また自己双対である．

---

1) 相対と区別して，双対を"そうつい"と読む．　2) かかい．

“双対”の例をいま少しあげよう．それは後の叙述にも必要なものである．今後 L は順序集合を表わす．

L の部分集合 A に対して，A の上界（L における）全体という集合に最小元があるとき，その最小元を A の（L における）**最小上界**または**上端**（supremum）といい，$\sup A$ で表わす．これは L に関係して定まるのであって，L と異なる順序集合 L' の部分集合として A が考えられたときは，L' における A の最小上界なるものは存在しないかもしれず，存在しても L におけるものとは異なるかもしれない．

最小上界の双対を**最大下界**または**下端**（infimum）という．A の最大下界とは，A の L における下界全体という集合の最大元であって，存在すれば，$\inf A$ で表わされる．$\inf A$ あるいは $\sup A$ が A に属するときに，それが A の最小元あるいは最大元なのである．

いま L において $\sup A$ も $\sup B$ も存在するとして，$A \subseteqq B$ なる場合を考えれば，$\sup B$ はもとより A の1つの上界となるから，

$$A \subseteqq B \quad \text{ならば} \quad \sup A \leqq \sup B$$

である．これの双対を取るときには注意を要する．集合の包含関係 $\subseteqq$ も1つの順序であるが，これは順序 $\leqq$ とは無関係であるから，双対命題において $\subseteqq$ を $\supseteqq$ で置き換えてはならない．上記のことの双対は，

$$A \subseteqq B \quad \text{ならば} \quad \inf A \geqq \inf B$$

となるのである．

いま，ある集合族すなわち集合の集合 F について，すべての元 X（$X \in F$）が L の部分集合であって，L における $\sup X$ が存在するものとしよう．このとき L における $\{\sup X \mid X \in F\}$ の上界全体という集合を A として，$\bigcup F$ の上界全体の集合を B とすれば，次のように $A=B$ が証明される．

a を A の任意の元とすれば，$\bigcup F$ の任意の元 x は F のある元 X の元であるから，$x \leqq \sup X$ および $\sup X \leqq a$ によって，$x \leqq a$ となる．すなわち $a \in B$ である．逆に b を B の任意の元とすれば，F の任意の元 X は $\bigcup F$ の部分集合であるから，いうまでもなく b は X の1つの上界，したがって $\sup X \leqq b$ である．すなわち $b \in A$．ゆえに $A=B$ である．

したがって $\{\sup X \mid X \in F\}$ の最小上界が存在することと，$\bigcup F$ の

最小上界が存在することとは同等であり，この2通りの最小上界は，存在すれば一致する：

$$\sup\{\sup X \mid X \in F\} = \sup \bigcup F$$

この事実の双対においても $\bigcup F$ は $\bigcap F$ では置き換えられず，

$$\inf\{\inf X \mid X \in F\} = \inf \bigcup F$$

が上の等式の双対となる．この2つの事実を**一般の結合律**という．

a が A の最大元であるとき，明らかに

$$a \leqq x \text{ かつ } x \in A \qquad \text{ならば} \qquad x = a$$

である．一般に上の条件を満たす A の元 a を A の**極大元**であるという．極大元は，たとい存在しても，1意に定まるとは限らない．たとえば3個の元 a, b, c から成る集合において，b, c の間にのみ $b < c$ なる関係があると定義し，“$x < y$ または $x = y$” を $x \leqq y$ で表わせば，これは1つの順序を与えるが，この集合の極大元は a および c である．上の条件はまた

$$a < x \text{ なる } A \text{ の元 } x \text{ は存在しない}$$

ともいえる．極大元の双対が**極小元**である．集合 A がある条件 φ によって $\{x \mid \varphi(x)\}$ なる形で表わされるとき，A の極大（小）元をまた“$\varphi(x)$ なる**極大な** x”（**極小な** x）ともいう．全順序集合において考えれば，上の第2の条件は，A のすべての元 x に対して $x \leqq a$ であることと同等になるから，極大と最大とは一致する．双対に，全順序集合においては極小元と最小元とは一致する．

なお，A の最小上界は“A の上界の全体という集合の最小元”であったが，この“　　”の部分を“A の上界のうちで最小なもの”と書けば日常の語法に近いであろう．一般に，“……の全体という集合の最小元”の代わりに“……のうちで最小なもの”と書き，また最大，極小，極大についても同様な形式を許すことにしよう．

§7. ラティスの定義

順序集合 L において，L のいかなる元 x, y についても，部分集合 $\{x, y\}$ の最小上界および最大下界があるとしよう．このような L を**束**，あるいは**ラティス** (lattice) といって，普通は $\{x, y\}$ の最小上界を $x \vee y$ で表わし，最大下界を $x \wedge y$ で表わす．元 z が $\{x, y\}$ の

下界であるということは

$$z \leqq x \quad かつ \quad z \leqq y$$

と表わされる．したがって，$x \wedge y$ が最大下界であるということは，

(Ⅰ) $\qquad x \wedge y \leqq x$ かつ $x \wedge y \leqq y$

(Ⅱ) $\qquad z \leqq x$ かつ $z \leqq y$ ならば $z \leqq x \wedge y$

と表わされる．双対に，$x \vee y$ が最小上界であるということは

(Ⅰ)′ $\qquad x \vee y \geqq x$ かつ $x \vee y \geqq y$

(Ⅱ)′ $\qquad z \geqq x$ かつ $z \geqq y$ ならば $z \geqq x \vee y$

と表わされる．また次の性質（Ⅲ），（Ⅲ）′ も容易に知られる：

(Ⅲ) $\qquad x \leqq y$ ならば $x \wedge y = x$

(Ⅲ)′ $\qquad x \leqq y$ ならば $x \vee y = y$

ラティスの定義が自己双対的であることに注意しよう．このことは，上記の（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）の組と（Ⅰ）′，（Ⅱ）′，（Ⅲ）′ の組との対応にも反映している．また，次にあげる交換律，結合律，吸収律の検証は，それぞれを構成する2つの等式の一方だけについて行なえばよいことになる．交換律は自明．結合律も容易に知られる．吸収律の第1式は，（Ⅰ）′ の第1式と（Ⅲ）とから直ちに結論される．

交換律： $x \wedge y = y \wedge x \qquad x \vee y = y \vee x$

結合律： $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

吸収律： $x \wedge (x \vee y) = x \qquad x \vee (x \wedge y) = x$

これらの等式は，1つのラティスのいかなる元 x, y, z に対しても成立するので，**ラティス恒等式** (lattice identity) とよばれている．また∨および∧は，1つのラティスの元 x, y に対して1意に確定する元 $x \vee y$ および $x \wedge y$ を対応させる演算として，**ラティス演算**または**ラティス算法** (lattice operation) とよばれる．演算 ∧ を **ミート** (meet)，演算 ∨ を **ジョイン** (join) というが，これらは後に述べる幾何学的な例に関連した術語であって，それぞれ **交わり**，**結び** という訳語でよばれることもある．

結合律によると，$x \wedge y \wedge z$ や $x \vee y \vee z$ のようにカッコを省略して書くことができる．$x \wedge y \wedge z$ は $\{x, y, z\}$ の最大下界であることも容易に知られる．一般に n 項（有限個）のミート と ジョイン

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots\cdots \wedge x_n \qquad x_1 \vee x_2 \vee \cdots\cdots \vee x_n$$

についても同様で，これらはそれぞれ $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ の最大下界，最小上界である：

$$x_1 \cap x_2 \cap \cdots\cdots \cap x_n = \inf\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$$

$$x_1 \cup x_2 \cup \cdots\cdots \cup x_n = \sup\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$$

さて，（Ⅲ），（Ⅲ）′ の逆も成り立つことは明白であるから，

i）　$x \cap y = x \qquad x \cup y = y$

の各等式は $x \leqq y$ と同等な条件になる．

かようにラティスにおける順序関係はラティス演算に関する等式で表わされることが知られた上は，逆に，順序の概念を用いずに演算のみでラティスを定義してから，演算に関する等式によって順序を導入しうるであろうと予想される．実際，ある集合 L のいかなる元 x，y に対しても，それらによって1意に確定する L の元 $x \cap y$ および $x \cup y$ が存在し，L のいかなる元 x，y，z に対しても前記の交換律，結合律，吸収律が成り立つとすれば，次に示すように，i）の2つの等式は同等であり，i）の成り立つことを $x \leqq y$ で表わせば $\leqq$ が1つの順序であって，演算 $\cap$ および $\cup$ がそれぞれ $\leqq$ に関するミートおよびジョインとなる．

演算 $\cap$ および $\cup$ が定義された集合 L において交換律，結合律，吸収律が恒等的に成立しているとしよう．吸収律の第1式の y に $x \cap y$ を代入すると

$$x \cap (x \cup (x \cap y)) = x$$

これの左辺の中で $x \cup (x \cap y)$ に吸収律の第2式を適用すれば，左辺は $x \cap x$ となる．双対も考えれば，2つの恒等式

ベキ等律　$x \cap x = x \qquad x \cup x = x$

が得られたことになる．

次に $x \cap y = y$，$y \cap z = z$ と仮定すれば，結合律によって

$$x \cap z = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = y \cap z = z$$

したがって $x \cap z = z$ となる．

また $x \cap y = y$，$y \cup x = x$ とすれば，交換律によって $x = y$ となる．

したがって，i）の第1式 $x \cap y = x$ の成立することを $x \leqq y$ で表わせば

$$x \leqq x,$$

$$x \leqq y \text{ かつ } y \leqq z \qquad \text{ならば} \qquad x \leqq z,$$
$$x \leqq y \text{ かつ } y \leqq x \qquad \text{ならば} \qquad x = y$$

である．これは $\leqq$ が順序であることを示している．

また，ｉ）の第2式 $x \vee y = y$ を仮定すると

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \wedge (x \vee y) \qquad &(\text{仮　定}) \\ &= x &(\text{吸収律}) \end{aligned}$$

となって，ｉ）の第1式が導かれる．同様にして，逆にｉ）の第1式から第2式が導かれる．ゆえに，ｉ）の両式は同等な条件であり，上の $\leqq$ の定義によって $x \leqq y$ とも同等である．

また，吸収律の第1式によれば，いかなる元 x，y についても

$$x \leqq x \vee y.$$

ここで x，y をとり換えて，交換律を使えば

$$y \leqq x \vee y.$$

ゆえに $x \vee y$ は $\{x,\ y\}$ の上界である．次に $\{x,\ y\}$ の任意の上界を z，すなわち $x \leqq z$，$y \leqq z$ とすれば，定義により

$$x \vee z = z, \qquad y \vee z = z$$

となるから，結合律によって

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z.$$

したがって $x \vee y \leqq z$ となる．

ゆえに，いかなる x，y に対しても $\{x,\ y\}$ の最小上界が存在して，それが $x \vee y$ である．同様に $\{x,\ y\}$ の最大下界が存在して $x \wedge y$ に等しい．

ゆえに，交換律，結合律，吸収律の恒等的に成り立つ演算 $\vee$，$\wedge$ の定義された集合 L においては，ｉ）の両式が同等であり，ｉ）によって $x \leqq y$ を定義すれば L は順序 $\leqq$ に関してラティスをなし，$\leqq$ に関するラティス演算は与えられた $\vee$，$\wedge$ に一致する．この理由に基づいて，上の3法則の成立する演算 と 集合 L との組 $(L,\ \vee,\ \wedge)$ はラティスをなすといい，上の定義による順序集合としてのラティス $(L,\ \leqq)$ をラティス $(L,\ \vee,\ \wedge)$ ともラティス L ともいう．上の証明で $\vee$ と $\wedge$ とを入れ換えれば，$\leqq$ に双対な順序 $\geqq$ がまず定義されることになる．このことから考えても，ラティスにおける双対は $\vee$ と $\wedge$ とを交換することであることが知られる．

§8. ラティスの代数的実例

最も簡単な構造を持ったラティスとしては，全順序集合がある．L が全順序集合ならば，L の元 x，y については，

$$x \leqq y \quad \text{あるいは} \quad y \leqq x$$

に従って

$$x \vee y = y,\ x \wedge y = x \qquad \text{あるいは} \qquad x \vee y = x,\ x \wedge y = y$$

である． この場合，われわれはもっと親しみ深い記号 $\max\{x, y\}$ および $\min\{x, y\}$ を，$x \vee y$ および $x \wedge y$ の代わりに用いることが多い．一般に順序集合 L の部分集合 S が最大元あるいは最小元を持つとき，それらをそれぞれ $\max S$，$\min S$ で表わす．

1つの集合 A の部分集合の全体，すなわちベキ集合 2^A を，順序 $\subseteqq$ とともに考えてもラティスの1例が得られる．その場合には合併集合がジョイン，共通部分がミートである．

A の有限部分集合の全体を順序 $\subseteqq$ とともに考えれば，同じ集合算をラティス演算としてラティスをなし，次の意味でラティス 2^A の**部分ラティス**となる．

ラティス L の部分集合 S が，

“$x \in S$ かつ $y \in S$ ならば $x \vee y \in S$ かつ $x \wedge y \in S$”

なる条件を満たすとき， すなわち L におけるラティス演算に関して閉じているとき， S は L の**部分ラティス** (sublattice) であるという．部分ラティス S を順序集合 L の部分順序集合と考えれば，S の元 x，y に対して，L における $\{x, y\}$ の最小上界 $x \vee y$，最大下界 $x \wedge y$ が S においてもその最小上界，最大下界であることは明白であろう．この意味で，部分ラティスは1つのラティスである．

部分ラティスの概念は群，環，体などにおける部分群，部分環，部分体などの類似をとったものである．これらの代数的な概念はラティスの概念の母体となったものでもあり，またラティスの豊富な実例を与えるものであるから，その 1，2 を簡単に紹介しておこう．

数に施す最も基本的な算法である加法の性質を抽象して，次の“加群”の定義をする．空でない集合 M において

i) 任意の元 x，y に対し，$x+y$ で表わされて1意に定まる元があ

り，

ii）任意の元 x，y に対して $x+y=y+x$，

iii）任意の元 x，y，z に対して $(x+y)+z=x+(y+z)$，

iv）任意の元 x，y に対して，$x=y+z$ なる元 z が1つ，そうしてただ1つある

場合に，演算 + を加法といい，iv）で定まる z を $x-y$ で表わしてこの演算を減法といい，集合 M に加法，減法をあわせ考えたものを**加群**（additive group，Modul）という．また集合 M は演算 $x+y$ に関して加群をなすという．

加群は演算によって組織づけられた集合（M，+，−）であるが，順序集合（L，$\leqq$）の場合と同様に，加群（M，+，−）を加群 M ということが多い．また加群 M の元や部分集合などというときには，演算をしばらく無視して，単なる集合 M の元や部分集合を考えるのである．演算や関係で組織づけられた集合については，このように，単なる集合との間で記号を流用し，術語を混用することが多い．

さて，加群においては，

$$\text{すべての元 } x \text{ に対して } x+0=x$$

となる元0があって，x に無関係に1意的に定まることが，代数学のたいがいの書物に，ごく簡単に証明されている．この元をその加群の**零**または**零元**という．加群における加法，減法の取扱いは普通の数の場合と異ならない．たとえば $x+y+z+u$ のような式のどこにカッコを入れても，また項の順序を変更しても同じ結果を得る．たとえば

$$(x+y)+(z+u)=x+(z+(y+u))$$

したがって上のようにカッコなしで表わすことが多い．また $0-x$ を $-x$ で表わせば

$$-(-x)=x, \qquad x-y=x+(-y).$$

加群 M の空でない部分集合 X が M における減法について閉じているとしよう．このとき，X は M における加法についても閉じていることと，M の零元0は X に属することが，次のように証明される．X の任意の元 x，y をとれば

$$0=x-x \in X$$

$$-y=0-y \in X$$

$$x+y=x+(-(-y))=x-(-y)\in X \qquad \text{(証明終)}$$

上のような X が M における演算について加群をなすことは明白であろう．この加群 X を M の **部分加群** という．たとえば，整数——正・負の整数と 0 ——の全体 N は普通の加法に関して加群をなし，

2 の倍数の全体 $A=\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm6,\ \cdots\cdots\}$

3 の倍数の全体 $B=\{0,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm9,\ \cdots\cdots\}$

はいずれも N の部分加群である．なお，合併集合 $A\cup B$ は N の部分加群でないことに注意しておこう．

加群 M の部分加群 X，Y に対して，共通部分 $X\cap Y$ も M の部分加群である．この $X\cap Y$ は，M の部分加群の全体がなす順序集合 $(L,\ \subseteqq)$ における対 $\{X,\ Y\}$ の最大下界である．合併集合 $X\cup Y$ は必ずしも L に属さないが，これに代わって $(L,\ \subseteqq)$ における $\{X, Y\}$ の最小上界となるものが，次のようにして得られる．X と Y の和 $X+Y$ を

$$X+Y=\{x+y\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$$

と定義しよう．すなわち

$$z=x+y, \qquad x\in X, \qquad y\in Y$$

の形に表わしうる元 z の全体が $X+Y$ である．まず $X+Y\in L$ を証明する．それには，$X+Y$ の任意の元 z，z' に対して $z-z'\in X+Y$ となることを示せばよい．z を上のように表わし，z' を

$$z'=x'+y', \qquad x'\in X, \qquad y'\in Y$$

と表わせば

$$z-z'=(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y'),$$
$$x-x'\in X, \qquad y-y'\in Y$$

であるから，$z-z'\in X+Y$．ゆえに $X+Y\in L$

上の $z=x+y$ で $y=0$ あるいは $x=0$ の場合を考えると，

$$X\subseteqq X+Y, \qquad Y\subseteqq X+Y$$

であることがわかる．また，Z が M の部分加群であって

$$X\subseteqq Z, \qquad Y\subseteqq Z$$

ならば，上の $z=x+y$ で $x\in Z$，$y\in Z$，したがって $z\in Z$ となり

$$X+Y\subseteqq Z$$

ゆえに $X+Y$ は L における $\{X,\ Y\}$ の最小上界である．

こうして，加群 M の部分加群の全体 L は $\subseteqq$ を順序としてラティスをなし，L における X と Y のジョイン は和 $X+Y$ であり，ミートは共通部分 $X \cap Y$ である．このラティスの元 X, Y, Z については，$X \subseteqq Z$ のとき

$$(X+Y)\cap Z \subseteqq X+(Y\cap Z)$$

となることが，次のように証明される．

$(X+Y)\cap Z$ の任意の元を z として，$z \in X+(Y\cap Z)$ を証明すればよい．この z は，$z \in X+Y$ かつ $z \in Z$ であるから，

$$z=x+y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z$$

と書くことができるが，最初の仮定 $X \subseteqq Z$ により $x \in Z$ となって

$$y=z-x \in Z$$

したがって $y \in Y \cap Z$ であり，これと $x \in X$ から

$$z=x+y \in X+(Y\cap Z) \qquad \text{(証明終)}$$

一般のラティスにおいて，条件 $x \leqq z$ のもとで $(x \vee y)\wedge z$ と $x\vee(y \wedge z)$ を比較してみよう．まず

$$x \vee y \geqq x, \qquad x \vee y \geqq y \geqq y \wedge z$$

であるから，x と $y \wedge z$ のジョインに対しても

$$x \vee y \geqq x \vee (y \wedge z) \tag{1}$$

また $z \geqq x$ と $z \geqq y \wedge z$ により

$$z \geqq x \vee (y \wedge z) \tag{2}$$

(1), (2) の左辺どうしのミートを作って

$$(x \vee y)\wedge z \geqq x \vee (y \wedge z)$$

この式は **modular 包含式**といわれ，$x \leqq z$ なる限りいかなるラティスにおいても成立する．

部分加群のラティスにおいては上と双対の順序が現われたから，これは等式となる．一般に **modular 律**

“$x \leqq z$ ならば いかなる y に対しても
$(x \vee y)\wedge z = x \vee (y \wedge z)$”

が成立するラティスを **modular ラティス**という．この等式は必ずしもすべてのラティスにおいて成り立つわけではない．たとえば図 2.2 で表わされる順序集合は modular でないラティスの一例である．

部分加群の作るラティスは modular ラティスであるが，おそらくは

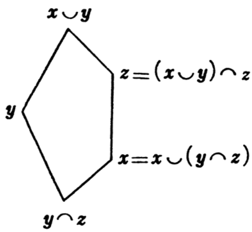


図 2.2

modular なる語も加群に対するドイツ語 Modul にちなんだものであろう．ラティスの概念を初めて導入した R. Dedekind は，この特殊なラティスから出発したのである．その他，環の ideal，あるいは（乗法）群の正規部分群，一般射影空間の線状部分空間などの作るラティスも modular ラティスであって，ラティスの重要な実例の多くは modular ラティスとなっている．

加群はまたしばしばその“作用素”とともに考察される．ある物 α と，加群 M の各元 x とに対して，αx で表わされる M の元が1意に確定し，M の任意の元 x，y に対して

$$\alpha(x+y)=(\alpha x)+(\alpha y)$$

が成立するとき，x と αx との対応——α と x との結合法——をも考えに入れて，α を M の**作用素**という．M の作用素の集合 Ω が与えられたとき，M と Ω との組を，**作用団** Ω を持った加群 M，あるいは Ω **加群**という．加群 M の部分加群 X の各元 x と，Ω の各元 α とに対して αx が X に属するとき，X を Ω **部分加群**という．Ω 部分加群は1つの Ω 加群をなす．また容易に知られるように，Ω 部分加群 X，Y に対して，$X+Y$ も $X\frown Y$ も Ω 部分加群である．ゆえに Ω 部分加群の全体は，部分加群全体のなすラティスの部分ラティスをなす．

さて modular ラティスの部分ラティスは，すべて modular ラティスであることは明らかである．したがって上記の Ω 部分加群のなすラティスもまた modular ラティスである．

Ω 加群の例　普通にわれわれが数として取り扱っている“実数”全体の集合を Ω とし，一定の自然数 n をとって，n 個の実数を順に並べたもの $\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle$ を簡単に x で表わそう．このような

$$x=\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \qquad y=\langle y_1, \cdots\cdots, y_n\rangle$$

などに対して，加法 $x+y$ を

$$x+y=\langle x_1+y_1, \cdots\cdots, x_n+y_n\rangle$$

で定義すれば，これらの物の全体が1つの加群をなす．たとえば減法は

$$x-y=\langle x_1-y_1, \cdots\cdots, x_n-y_n\rangle$$

で与えられる．更に実数 α との結合を

$$\alpha x = \langle \alpha x_1, \cdots\cdots, \ \alpha x_n \rangle$$

で定義すれば，ここに1つの Ω 加群が得られる．これが普通にいう ***n* 次元 vector 空間**である．その“**線型部分空間**”は Ω 部分加群として定義される．これは加群の1例としてあげたが，また後に一般射影空間について述べるときの参考ともなろう．

上に作用素と加群の元との結合を αx で表わしたが，これはいわゆる**左作用素**である．これに対して，加群 M の元 x に M の元 $x\beta$ を1意に対応させて，恒等的に

$$(x+y)\beta = (x\beta) + (y\beta)$$

を成立させるような結合法が与えられたとき，結合法も考えに入れて，β を M の**右作用素**という．以前の意味の作用団を**左作用団**といい，これに準じて**右作用団**を定義する．

加群 R がそれ自身の左作用団，かつ右作用団であって，R の任意の元 x, y, z に対して

結合律　　　　$(xy)z = x(yz)$

が成立するとき，R は**環**（ring）をなすといい，R にその加群と結合法 xy——それを乗法という—— とをあわせて考えたものを環という．たとえば整数の全体は普通の加法，乗法に関して環をなす．R の部分集合であって加法および乗法に関して閉じたものは環をなすが，その環を R の**部分環**という．また R を左作用団とする R 部分加群を**左 ideal** といい，同様に**右 ideal** を定義し，右 かつ 左 ideal であるものを単に **ideal** という．

いま R の部分環の全体を L とし，L の空でない任意の部分集合を F として，F の共通部分 $\cap F$ を H とすれば，もとより $H \subseteqq R$ である．H の任意の元 x, y は，F の任意の元 X の元であるから，

$$x-y \in X, \qquad xy \in X$$

であり，したがって

$$x-y \in H, \qquad xy \in H$$

となる．ゆえに，H は乗法について閉じた部分加群，すなわち L の元である． 特に $X \in L$, $Y \in L$ に対して，$X \wedge Y$ は L における $\{X, Y\}$ の最大下界であるある．また $F = \{Z | X \subseteqq Z, \ Y \subseteqq Z, \ Z \in L\}$

と置けば，明らかに $R \in F$ であるから，F は空でなく，H も F に属するから，それは $\{X, Y\}$ の最小上界である．ゆえに L は集合の包含関係に関してラティスをなす．

この論法は，いわゆる代数系における部分系の全体がラティスをなすことの証明にも用いられる．

§9. 幾何学との関連

平面上の互いに平行な直線 l, l' などは，それらの方向によって定まるただ1つの“無限遠点” L において交わると考え，無限遠点の全体が1つの“無限遠直線”上にあると考えて，平面の射影幾何が作られることは周知のとおりである．無限遠にある要素の導入は，いわゆる斉次座標の方法で直接に自然に行なわれるが，ここでは，もっと図形的な考え方をたどってみる．

考える平面を α とし，α 外の1点 A を固定し，α 上の点 P に直線 AP を対応させよう．P を α 上の定直線 l に沿って無限に遠くへ追いやれば，AP は A を通って l に平行な直線 $\tilde{l}$ にだんだんと近づくであろう．この直線 $\tilde{l}$ は l が α 上のどこにあっても，その方向だけに依存して1意に定まるから，α 上の無限遠点 L は， A を通り α に平行な直線と対応すると考えてよいであろう．このような方法で“射影平面”の点と A を通る直線とが1対1に対応することがいわれる．無限遠直線に対応するものは，α に平行な直線の全体であり，したがって A を通り α に平行な平面を作る．それ以外の α 上の直線 l に対応するも

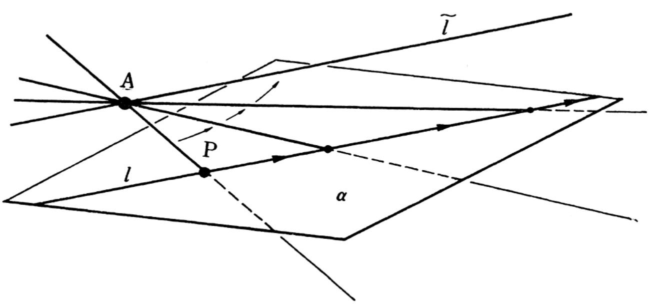


図 2.3

のは，A と l で定まる平面である．かようにして，射影平面上の直線は A を通る平面で表わされる．

A として空間の座標系 XYZ の原点をとって考えよう．空間の点の座標は3個の実数の組 $\langle x, y, z\rangle$ である．それらは全体として前節の意味で1つの3次元 vector 空間をなす．これを V_3 で表わそう．A を通る1直線上の点の座標全体は1つの1次元線型部分空間をなす．また A を通る平面には 2次元線型部分空間が対応する．0次元線型部分空間，すなわち A(0, 0, 0) のみから成る部分空間は，α 上の点集合に対応させれば，空集合を表わす．V_3 は全射影平面と対応する．

同様な方法によれば，射影平面と限らず，“射影空間”の点は4次元 vector 空間の1次元線型部分空間で表わされ，またその中の射影平面は3次元線型部分空間で表わされる．更に高次元の“n 次元射影空間”は，逆に $n+1$ 次元 vector 空間から次のように定義される．

$n+1$ 次元 vector 空間 V_{n+1} の 1次元線型部分空間を点，2次元線型部分空間を直線，r 次元線型部分空間を $(r-1)$ 次元射影部分空間ということにし，$r=n+1$ のとき，特に **n 次元射影空間**といって P_n で表わそう．$P_n=V_{n+1}$ である．この定義に従って **n 次元射影幾何学**が建設される．2つの射影部分空間 α, β の交わりは集合としての共通部分である．α と β との張る（あるいは“定める”）射影部分空間は，V_{n+1} を加群と考えたとき，部分加群のなすラティスにおける α と β とのジョイン $\alpha\cup\beta$ である．$\alpha\cup\beta$ を考えることは，α も β も点であるときは，α と β とを結ぶ直線を考えること，すなわち α と β とを“結ぶ”ことにほかならない．

こうして作られた射影空間において，射影部分空間の全体は V_{n+1} の部分加群の全体であるから，1つの modular ラティスをなす．すなわち，$\alpha\leqq\beta$——それは α が β に含まれる，あるいは β が α を“通る”ことを意味する——ならば，任意の射影部分空間 γ に対し $(\alpha\cup\gamma)\cap\beta$ と $\alpha\cup(\gamma\cap\beta)$ とは一致する——すなわち，α と γ との張る部分空間と β との交わりは，β と γ との交わりと α との張る空間に一致する．

ここで注釈を付けた幾何学的いい表わし方に比べて，等式

$$(\alpha\cup\gamma)\cap\beta=\alpha\cup(\gamma\cap\beta)$$

のほうがはるかに簡単であることが認められるであろう．このように簡単な記法を，簡単な基本関係たとえば吸収律，modular 律などとともに駆使して，推理の代数化を行ないうるところに，ラティス概念の１つの有効さが見いだされる． それはまた Hasse の図式のような 図形的な表わし方とも結びつくのである．

上に述べたのは，いわゆる“実射影空間”である．“数”の代わりにある体の元をとっても同様に一般の射影幾何学ができる．更に V_{n+1} の部分線型空間を考えることは，それの元のみを行とする $n+1$ 行 $n+1$ 列の matrix の全体を考えること， すなわち $(n+1)^2$ 階の matrix 環の左 ideal を考えることに相当する．

後にわれわれは，ラティス概念によっていくぶん整理された，射影幾何の公理系を与えるであろう．

第3章　ラティスの一般論

§10. 完備ラティス

応用の上で重要なラティスの多くは，次の意味で完備（complete）である．

L を順序集合とし，L の部分集合 X の上界の全体を Y としよう．定義によって，X の任意の元 x と，Y の任意の元 y の元との間には $x \leqq y$ なる関係がある．したがって X の任意の元 x は Y の下界である．ゆえに，もし Y の最大下界 $\inf Y$ が存在すれば，X の任意の元 x に対して $x \leqq \inf Y$，すなわち $\inf Y$ は X の上界であり，したがって Y に属するから，X の最小上界 $\sup X$ である．

これと双対に，順序集合 L の部分集合 X の下界全体の集合を Z とするとき，もし $\sup Z$ が存在すれば，それは X の最大下界 $\inf X$ である．それゆえ，次の2つの条件（L に関する条件）は互いに同等である：

L のいかなる部分集合 X に対しても，L における最大下界 $\inf X$ が存在する．

L のいかなる部分集合 X に対しても，L における最小上界 $\sup X$ が存在する．

これらの2条件を満たす順序集合 L を，**完備**であるという．特に X として L の元の対をとって考えれば，完備な順序集合はラティスをなすことがわかる．この意味で**完備ラティス**ともいう．完備ラティス L 自身の最小上界，最大下界は L の最大元，最小元にほかならない．

一般に順序集合 L の最大元または最小元が存在するとき，それぞれ L の**単位元**または**零元**ともいい，それぞれ 1 または 0 で表わすことが多い．いま最大元 1 の存在する順序集合 L において，

X を空でない部分集合とすれば，必ず $\inf X$ が存在する

と仮定してみよう．任意の部分集合 Y に対して，Y の上界の全体を X とすれば，X は L の最大元を1つの元として含むから，空ではなく，

したがって $\inf X$ があり，それは前記のように $\sup Y$ である．ゆえにこの場合には，いかなる部分集合に対しても，その最大上界が存在し，L は完備である．

同様に，最小元を有する順序集合 L において，

X を空でない部分集合とすれば，必ず $\sup X$ が存在する

という条件が満たされている場合には，L は完備である．

いま，ある集合 A と，A のある部分集合 S が与えられ，S の元に A の元を1意的に対応させる演算が与えられたとしよう． このとき，その演算を A における**1項演算**という． たとえば A を実数全体の集合とするとき，逆数をとる演算は1項演算であり，それの適用される範囲 S は，0以外の数の全体である．

また A の元のある種の順序対に，A の元を1意的に対応させる演算を**2項演算**という．たとえば数の四則演算はすべてその例である．同様に3項演算，4項演算等々が定義される．それらを総称して**代数的演算**という．ある集合 A と，A における代数的演算の ある集合が与えられたとき，これら2つの集合の組を**代数系**という．たびたび述べたように，この代数系をまた集合の記号 A で表わすことが多い．

代数系 A に対して，A の部分集合 B がそのすべての演算に関して閉じているとき，すなわち B の元にその演算を施したものがすべて B に属するとき，B を**部分代数系**という．部分代数系の全体を L として，これを集合の包含関係とともに考えれば，A が L の最大元である．また L の空でない任意の部分集合 X に対して，それの共通部分を B とすれば，B の元にその演算を施したものは，X のすべての元に属するから，再び B に属する．したがって B は部分代数系である． この B が L における X の最大下界をなすことは明らかであろう．ゆえに L は完備ラティスをなす．

たとえば，環 R において，R の元 x, y の差を作る2項演算

$$\langle x,\ y\rangle \longrightarrow x-y \tag{1}$$

と，R の元 a で定まる1項演算

$$x \longrightarrow ax \tag{2}$$

を考えよう．一般には，a が多数あるのに応じて，上のような1項演算が多数あるかもしれない． 2項演算（1）と（2）の形の1項演算すべ

てについて——それらの全体を演算の集合として——Rを代数系とみなせば，空でない部分系がすなわち R の左 ideal である．

空でないという条件は，R の0を元とするという条件と同等であるから，R の左 ideal の全体が集合の包含関係に関して完備ラティスをなすことが，上の考察から直ちに知られる．

ラティスもまた2項演算 $\cup$ および $\cap$ を持った代数系と考えられる．この意味での部分代数系が部分ラティスである．部分ラティスの全体がまた，集合の包含関係に関して完備ラティスをなす．集合算との類似に従って，$\cup$ を和に見立て，$\cap$ を積に見立てて，環の ideal にならって**ラティスの ideal** を次のように定義する．ラティス L において L の元 a で定まる1項演算 $x \to a \cap x$ をすべての a に対して考え，また2項演算 $\langle x, y \rangle \to x \cup y$ を考えたとき，L は1つの代数系をなすと考えられる．この意味でのLの部分代数系を，L の ideal という．その双対概念を **双対 ideal** という．直接に定義すれば，ラティス L の双対 ideal とは，L の部分集合 S であって，

i) $a \in L,\ x \in S$ ならば $a \cup x \in S$

ii) $x \in S,\ y \in S$ ならば $x \cap y \in S$

という2性質を持つものである．1つのラティスの ideal の全体，双対 ideal の全体がそれぞれ集合の包含関係に関してラティスをなすことは，上の一般的考察から導かれるわけである．

§11. 切　　断

最小上界や最大下界をとる演算はすこぶる便利である．たとえば

“a が X の1つの上界である”

という長い文句は簡単に $\sup X \leqq a$ という式で表わされる，そこで，任意に与えられた順序集合が完備でない場合には，適当に新しい元を追加してこれを完備にすることが望まれる．その1つの方法が**切断による完備化**である．これは，有理数の集合を拡張して無理数を導入するとき Dedeking の切断 (Schnitt) を用いるのに相当する．

順序集合 L の部分集合 Z に対して，Z の上界の全体を Z^* で表わし，Z の下界の全体を Z_* で表わそう．$Z \supseteq W$ ならば，Z の上界は W の上界でもあり，Z の下界は W の下界である．すなわち

$$Z \supseteqq W \quad \text{ならば} \quad Z^* \subseteqq W^*, \quad Z_* \subseteqq W_* \qquad (1)$$

となる．また，Z の任意の元は，Z^* の下界であり，Z_* の上界である．すなわち

$$Z \subseteqq (Z^*)_* \qquad Z \subseteqq (Z_*)^*. \qquad (2)$$

さて，L の部分集合 X，Y が条件

$$X = Y_* \qquad Y = X^*$$

を満たすときに，順序対 $\langle X,\ Y\rangle$ を L の **切断** という．たとえば，L の1つの元 a をとって

$$X = \{x \mid x \leqq a\} \qquad Y = \{y \mid a \leqq y\}$$

と置けば，$\langle X,\ Y\rangle$ は切断になる．これを a **による切断** という．

$\langle X,\ Y\rangle$ も $\langle U,\ V\rangle$ も切断であるとき，(1) によれば，2条件

$$X \subseteqq U, \qquad Y \supseteqq V$$

は同等である．

これらの条件を $\langle X,\ Y\rangle \leqq \langle U,\ V\rangle$ で表わせば，切断の全体という集合 $\bar{L}$ が $\leqq$ で順序づけられる．また L の元 a による切断を $\bar{a}$ で表わせば，$a \leqq b$ と $\bar{a} \leqq \bar{b}$ とが同等であることは明らかであろう．特に $a = b$ と $\bar{a} = \bar{b}$ とが同等であるから，対応 $a \longleftrightarrow \bar{a}$ は1対1で，順序同型になる．したがって，順序に関する構造のみに注目すれば，$\bar{L}$ はいわば L に適当に元を補って得られた集合とも考えられる．$\bar{L}$ が完備であることを次に証明しよう．

まず L の任意の部分集合 A に対して

$$B = A^*$$

と置けば，(2) によって $A \subseteqq B_*$ である．したがって，(1) によって $A^* \supseteqq (B_*)^*$ すなわち $B \supseteqq (B_*)^*$ である．ところが (2) によって $B \subseteqq (B_*)^*$ であるから，結局

$$(B_*)^* = B$$

となる．いま $\bar{L}$ の任意の部分集合 M に対して，$\langle X,\ Y\rangle \in M$ なる切断に現われるような X 全体の，L における共通部分を A としてみよう．$\langle X,\ Y\rangle \in M$ ならば，$A \subseteqq X$ であるから，$A^* \supseteqq X^*$，したがって $(A^*)_* \subseteqq (X^*)_*$ であるが，切断の定義により $(X^*)_* = X$ であるから，$(A^*)_* \subseteqq A$．一方 $A \subseteqq (A^*)_*$ であるから，結局 $(A^*)_* = A$．そこで $B = A^*$ と置けば $\langle A,\ B\rangle \in \bar{L}$．切断 $\langle U,\ V\rangle$ が M の下界である

という条件は，“上のようなすべての X に対して $U \subseteqq X$ である”ということであるから，条件 $U \subseteqq A$ と同等，すなわち

$$\langle U,\ V\rangle \leqq \langle A, B\rangle$$

と同等である．したがって，$\langle A,\ B\rangle$ は M の最大下界 $\inf M$ である．

ゆえに $\bar{L}$ は完備である．

特に M が $\bar{x}\,(x \in L)$ なる形の切断のみからできているときを考えよう．そこに現われる x の全体を N とする：

$$M = \{\bar{x} \mid x \in N\}, \qquad N \subseteqq L\,.$$

上の証明で考えたような X とは

$$\{u \mid u \leqq x\}, \qquad (x \in N)$$

なる形の集合であるから，それらの共通部分 A は N の下界の全体 N_* にほかならない．したがって，もし N の最大下界 $\inf N$ (L における）が存在すれば

$$A = \{u \mid u \leqq \inf N\}$$

であり，逆にもし $A = \{u \mid u \leqq a\}$ なる L の元 a が存在すれば a は N の最大下界である．それゆえ，

$$\inf M = \bar{a} \text{ なる } a \text{ が存在すれば } a = \inf N\,,$$
$$\text{逆に } \inf N \text{ が存在すれば } \inf M = \overline{\inf N}$$

である．

ここで双対概念に移ってみると，切断 $\langle X, Y\rangle$ の定義において X と Y の位置が入れ換わるだけである．それゆえ，上の結論と双対な結論が得られる．すなわち，順序集合 L において部分集合 N の最小上界 $\sup N$ が存在するためには，$\bar{L}$ における $M = \{\bar{x} \mid x \in N\}$ の最小上界 $\sup M$ が

$$\sup M = \bar{a} \quad (a \in L)$$

の形に表わされることが，必要かつ十分であり，このときには

$$a = \sup N$$

である．

以上を要約すれば

任意の順序集合 L に対し，L の切断の全体 $\bar{L}$ は完備ラティスをなし，L の元 a とそれによる切断 $\bar{a}$ との対応は順序同

型対応であって，inf および sup は（存在する限り）この対応において保存される．

ということになる．したがって，ある意味で L は $\bar{L}$ の一部，$\bar{L}$ は L の拡張と考えられる（50〜53ページ参照）．

特に，有理数（正負の整数および零から作られる分数）の全体を大小関係で順序づけたものを L とすれば，$\bar{L}$ はこれに $+\infty$，$-\infty$ および無理数を導入したものになる．これから $+\infty$，$-\infty$ を取り除いたものがいわゆる実数の全体である．これにならって，一般の場合にも，L から最大元と最小元を取り除けば，

上界のある部分集合に対しては最小上界があり，
下界のある部分集合に対しては最大下界がある

という性質をもつ順序集合となる．ただし，"上界のある部分集合"というとき，上界がその部分集合の元である必要はないのである．上の性質を，その順序集合が **条件的に完備** であるといい表わす．

任意の順序集合 L に対し，切断 $\langle X, Y\rangle$ の定義に"X も Y も空でない"という制限を付け加えれば，上の議論はだいたいそのまま成立して，このような制限つきの切断の全体 $\tilde{L}$ は，条件的に完備な順序集合になる．$\tilde{L}$ は必ずしもラティスではないが，L がラティスであれば $\tilde{L}$ もラティスになる．

完備化 $\bar{L}$ の任意の元は $\{\bar{x}|x\in L\}$ のある部分集合の最大下界として表わされることが，次のようにして知られる．$\bar{L}$ の元，すなわち切断 $\langle X, Y\rangle$ に対して，$M=\{\bar{x}|x\in Y\}$ と置けば，$\langle A, B\rangle=\inf M$ に対して，前の議論で A は Y_* と一致する．すなわち $A=X$．ゆえに

$$\langle X, Y\rangle=\langle A, B\rangle=\inf M$$

である．

これと双対に，$\bar{L}$ の任意の元は $\{\bar{x}|x\in L\}$ のある部分集合の最小上界としても表わされる．

条件的完備化 $\tilde{L}$ の任意の元についても同様である．

したがって切断による完備化（または条件的完備化）は，L につけ加える元をできるだけ節約した完備化（または条件的完備化）といえよう．

§12. ideal のラティス

もとのラティスの性質を切断のラティスよりも，よく反映するのは，ideal のラティスである．これは，もとの ラティスにおいて成り立つ恒等式をすべて成立せしめるとの意味でいったのであるが，ここでラティスにおける“恒等式”，“多項式”の意味を定めねばならない．

ラティス多項式とは，幾つかの文字を記号 $\cup$，$\cap$ で次々に結合して得られた式をいうのであるが，ていねいに定義すれば次のようになる．

(i) ラティスの元を表わす文字を**ラティス単項式**という．

(ii) ラティス単項式はラティス多項式である．

(iii) P と Q がラティス多項式ならば，$(P)\cup(Q)$ も $(P)\cap(Q)$ もラティス多項式である．ただし P あるいは Q が ラティス単項式ならば，その前後の（ ）を省く．

(iv) このようにして得られたものだけがラティス多項式である．

ラティス多項式 P が文字 α，$\beta,\cdots\cdots$ またはその1部で組み立てられていることを示すため，P を $P(\alpha,\ \beta,\cdots\cdots)$ で表わし，その α，$\beta,\cdots\cdots$ の所にそれぞれ x，$y,\cdots\cdots$ を代入したものを $P(x,\ y,\cdots\cdots)$ で表わそう．ラティス多項式 $P(\alpha,\ \beta,\cdots\cdots)$，$Q(\alpha,\ \beta,\cdots\cdots)$ が与えられたとき，ティス L に関する条件：

“L のいかなる元 x，$y,\cdots\cdots$ に対しても

$$P(x,\ y,\cdots\cdots)=Q(x,\ y,\cdots\cdots)\text{”}$$

を“**ラティス恒等式** $P(\alpha,\ \beta,\cdots\cdots)=Q(\alpha,\ \beta,\cdots\cdots)$”という．

任意のラティスにおいて

$$p\leqq p',\ q\leqq q' \quad \text{ならば} \quad p\cup q\leqq p'\cup q',\ p\cap q\leqq p'\cap q'$$

となることは明白である．したがって単項式から出発して，いかなるラティス多項式 P に対しても

$$x\leqq x',\ y\leqq y',\cdots\cdots \quad \text{ならば} \quad P(x,\ y,\cdots\cdots)\leqq P(x',\ y',\cdots\cdots)$$

なる法則が成り立っていくことが知られる．

さて ideal の話にもどって，ラティス L の部分集合 S に対し，$J(S)$ を次のように定義しよう．ただし右辺の $\cap$ は L における 共通部分である．

$$J(S)=\cap\{X\,|\,X \text{ は } L \text{ の ideal で，} S\subseteqq X\}$$

$J(S)$ は1つの ideal である．これを，S で生成された L の ideal という．L の ideal の全体を L^* で表わし，その元を X, Y,……で表わそう．そして $X\wedge Y$, $X\vee Y$ はラティスとしての L^* における演算とし，集合算とは考えないことにする．

任意のラティス多項式 P と任意の ideal X, Y,…… に対して次のことが成り立つ，ということを示そう：

$z\leqq P(x,\ y,\cdots\cdots)$ となる X の元 x, Y の元 y,……
が存在するような z の全体が $P(X,\ Y,\cdots\cdots)$ である．

これは単項式の場合には明白である．ラティス多項式 P, Q に対して成り立てば $(P)\vee(Q)$ および $(P)\wedge(Q)$ に対しても成り立つ，ということが示されれば，単項式から出発して次々に，あらゆるラティス多項式に対して成り立つことがわかる．

P と Q について上のことを仮定し，$R=(P)\vee(Q)$ とし，

$$U=P(X,\ Y,\cdots\cdots),\qquad V=Q(X,\ Y,\cdots\cdots)$$

と置く．また x, y,……はそれぞれ X, Y,……の元を一般的に表わす variable とし，

$$W=\{z\,|\,z\leqq R(x,\ y,\cdots\cdots)\ \text{となる}\ x,\ y,\cdots\cdots\text{が存在する}\}$$

$$p=P(x,\ y,\cdots\cdots),\qquad q=Q(x,\ y,\cdots\cdots),\qquad r=R(x,\ y,\cdots\cdots)$$

として，次の（1），（2），（3）が成り立つことを示そう．

$$U\subseteqq W,\qquad V\subseteqq W. \tag{1}$$

$$w\leqq z\in W\quad \text{ならば}\quad w\in W. \tag{2}$$

$$z\in W,\ z'\in W\quad \text{ならば}\quad z\vee z'\in W. \tag{3}$$

まず（1）は，P と Q についての仮定と $p\leqq r$, $q\leqq r$ から知られる．また（2）は W の定義から明白である．（3）については，（3）の前提 $z\in W$, $z'\in W'$ と W の定義とに従って $z\leqq r$, $z'\leqq r'$ としよう．ただし

$$r'=R(x',\ y',\cdots\cdots),\qquad x'\in X,\ y'\in Y,\cdots\cdots.$$

これに対して $\bar{x}=x\vee x'$, $\bar{y}=y\vee y'$,…… と置けば，

$$z\leqq r\leqq R(\bar{x},\ \bar{y},\cdots\cdots),\qquad z'\leqq r'\leqq R(\bar{x},\ \bar{y},\cdots\cdots)$$

によって $z\vee z'\leqq R(\bar{x},\ \bar{y},\cdots\cdots)$ となる．また X, Y,…… は ideal であるから $\bar{x}\in X$, $\bar{y}\in Y$,……．したがって $z\vee z'\in W$ となり，（3）が成り立つ．（1），（2），（3）によって，W は U と V を含

む ideal である．したがって $U \smile V \subseteqq W$．一方 $p \in U$，$q \in V$ により $p \in U \smile V$，$q \in U \smile V$ であるが，$U \smile V$ は ideal であるから $p \smile q \in U \smile V$，すなわち

$$R(x,\ y, \cdots\cdots) \in U \smile V\ .$$

ゆえに，W の定義により $W \subseteqq U \smile V$．したがって $W=U \smile V$ となる．これは，われわれの仮定が R についても成り立つことを示している．

次に $R=(P) \frown (Q)$ として，前と同様の記号を用いよう．今度は $r \leqq p$，$r \leqq q$ であるから $W \subseteqq U$，$W \subseteqq V$ となる．W が ideal であることは前と全く同様であって，$W \subseteqq U \frown V$．また $U \frown V$ の任意の元 z は U の元，かつ V の元であるから，これに対し $z \leqq p$，$z \leqq q'$ なる p，q' が存在する．ただし

$$q'=Q(x',\ y', \cdots\cdots), \qquad x' \in X,\ y' \in Y', \cdots\cdots$$

前と同様に $z \leqq R(\bar{x},\ \bar{y}, \cdots\cdots)$ となるから，$z \in W$ である．すなわち $U \frown V \subseteqq W$．ゆえに $W=U \frown V$．これは，R に対してわれわれの仮定が成り立つことを示している．

これで証明は済んだわけである．このことから，任意のラティス多項式 P と任意の ideal X，$Y, \cdots\cdots$ に対して

$$P(X,\ Y, \cdots\cdots)=J(\{P(x,\ y, \cdots\cdots)\,|\,x \in X,\ y \in Y, \cdots\cdots\})$$

が成り立つことが知られる．そこで，もし L においてラティス恒等式

$$P(\alpha,\ \beta, \cdots\cdots)=Q(\alpha,\ \beta, \cdots\cdots)$$

が成立すれば，任意の ideal X，$Y, \cdots\cdots$ に対して $P(X,\ Y, \cdots\cdots)$ と $Q(X,\ Y, \cdots\cdots)$ とが一致し，したがって同じラティス恒等式が ideal のラティス L^* においても成立する．

特にただ1つの元から成る集合 $\{a\}$ で生成された ideal $J(\{a\})$ を，a で生成された**単項 ideal** という．それが $\{a\}$ の下界全体の集合

$$\{x\,|\,x \leqq a\},$$

すなわち前節の記号で $\{a\}_*$ と一致することはいうまでもあるまい．x が $J(\{a\})$，y が $J(\{a\})$ の中を動くとき，$x \smile y$，$x \frown y$ の最大値がそれぞれ $a \smile b$，$a \frown b$ であるから，L^* の中で

$$J(\{a\}) \smile J(\{b\})=J(\{a \smile b\}),\ J(\{a\}) \frown J(\{b\})=J(\{a \frown b\})$$

となり，$a \longleftrightarrow J(\{a\})$ がラティス演算を保存する対応であって，それ

はまた1対1であることも明白である.

§13. ラティス準同型写像

ラティスの元にその元で生成される単項 ideal を対応させる対応は，ラティス同型対応とよばれるものの1種である．そしてラティス同型対応はラティス準同型対応あるいはラティス準同型写像とよばれるものの1種である．

一般に，集合 L を定義域とし，集合 L' の元を値とする関数 f を，L から L' の**中への写像**ともいう．$A \subseteqq L$ のとき，A の元に対応する f の値の全体 $\{f(x) \mid x \in A\}$ を，f による A の**像**といって，しばしば $f(A)$ で表わす．$f(L)$ が関数 f の値域である．$f(L)=L'$ の場合に，f を L から L' の**上への**写像という．

f がラティス L からラティス L' の中への写像であって，ラティス演算を保存するとき，すなわち L のすべての元 x，y に対して

i）　$f(x \frown y)=f(x) \frown f(y)$，　　$f(x \smile y)=f(x) \smile f(y)$

が成り立つときに，f を**ラティス準同型** (lattice-homomorphic) な写像，あるいは単にラティス準同型 (lattice-homomorphism) という．このとき，f の像 $f(L)$ は L' の部分ラティスになっている．

ラティスと限らず，一般に L と L' とはいずれも演算 $\smile$ および $\frown$ を持つ代数系で，それぞれ，いかなる2元に対してもこれらの演算が施されるものとしよう．更に f は上のｉ）を満たす関数であるとしよう．この場合にも，前節と同じく，これらの演算記号で文字を組み合わせたものをラティス多項式といい，ラティス恒等式などということばを用いてもよいであろう．

上の仮定から直ちに，いかなるラティス多項式 P および，L のいかなる元 x，$y, \cdots\cdots$ に対しても，

$$f(P(x,\ y, \cdots\cdots))=P(f(x),\ f(y), \cdots\cdots) \qquad (1)$$

となることが知られる．これを用いると，L においてラティス恒等式

$$P(\alpha,\ \beta, \cdots\cdots)=Q(\alpha,\ \beta, \cdots\cdots) \qquad (2)$$

が成り立てば $f(L)$ においても（2）が成り立つことが，次のように証明される．$f(L)$ の任意の元 u，$v, \cdots\cdots$ に対して，それぞれ

$$u=f(x), \quad v=f(y), \cdots\cdots$$

となる L の元 x, y,…… があるから，（1）と，L における（2）とにより，

$$P(u,\ v,\cdots\cdots)=P(f(x),\ f(y),\cdots\cdots)$$
$$=Q(f(x),\ f(y),\cdots\cdots)=Q(u,\ v,\cdots\cdots)$$

が導かれる．

かように，L において成り立つラティス恒等式はすべて $f(L)$ においても成り立つ．特に L が $\vee$, $\wedge$ に関してラティスをなせば，ラティスを特徴づける恒等式（交換律，結合律，吸収律）はすべて $f(L)$ においても成り立ち，$f(L)$ もラティスをなす．

上の場合には明らかに

$$\text{ii)}\ \begin{cases} f(x)=f(x'), \qquad f(y)=f(y') \\ \text{ならば} \\ f(x\wedge y)=f(x'\wedge y'), \qquad f(x\vee y)=f(x'\vee y') \end{cases}$$

であるが，この性質 ii）の中には，L' における演算は現われてこない．そこで一般に，L' においては特に演算が定義されていないが ii）だけは満たされているとしよう．このとき $f(L)$ の任意の元 u, v に対し，

$$u=f(x), \qquad v=f(y)$$

なる L の元 x, y をとって，

$$a=f(x\wedge y), \qquad b=f(x\vee y)$$

を作れば，a および b は u, v のみによって定まり，x, y の選び方に関係しない．そこで

$$u\wedge v=a, \qquad u\vee v=b$$

と置けば，$f(L)$ の任意の元を結合して再び $f(L)$ の元を得る演算が1意に定義される．これらを，L から $f(L)$ に導入された（ラティス）演算という．これに関しては，i）はもとより満たされている．これは既に与えられたラティスから新しいラティスを定義する方法の1つであるが，同様な方法は他の代数系にも適用される．

いま $f(x)=f(x')$ を L の元 x, x' の間の関係と考えて，$x\equiv x'$ で表わそう．これは明らかに1つの同値関係である．すなわち

$$x\equiv x\ ;$$
$$x\equiv x' \quad \text{ならば} \quad x'\equiv x;$$
$$x\equiv x',\ x'\equiv x'' \quad \text{ならば} \quad x\equiv x''.$$

特に条件 ii）は

ii)′ $x \equiv x'$, $y \equiv y'$ ならば $x \wedge y \equiv x' \wedge y'$, $x \vee y \equiv x' \vee y'$

なる条件と同等である．一般に，ラティス L における同値関係であって条件 ii）を満たすものを，ラティスにおける**合同**という．

前に述べたように，同値関係は L の１つの類別 D を与える．すなわち，L の元 x に L の部分集合 $C(x)=\{x' | x \equiv x'\}$ を対応させれば，$x' \in C(x)$ に対しては $C(x')=C(x)$ である．$C(x)$ のような形の集合が類，類の全体 $D=\{C(x) | x \in L\}$ が類別であった．C を，定義域が L で値域が D である関数と考えれば，ii)′ と ii）とは同等な条件である．そこで条件 ii)′ のもとで D に演算 $\vee$, $\wedge$ を前の方法で導入することができる．ただし，それらは，類を集合と考えたときの集合算とは別のものである．

特に同値関係が前のように関数 f から導かれたのである場合には，$f(L)$ の元 $f(x)$ と D の元 $C(x)$ とを対応させれば，$f(L)$ と D との間の１対１の対応が得られ，この対応が（$f(L)$ の元に D の元を対応させると考えても，その逆に考えても）ラティス準同型対応になる．

L から L' の上へのラティス準同型写像 f が１対１の対応を与える場合，すなわち $f(x)=f(x')$ ならば必ず $x=x'$ である場合には，**ラティス同型**という語を用いる．L から L' の上へのラティス同型写像が与えられたとき，L' の任意の元 u に対して，$f(x)=u$ によって１意に定まる L の元 x を対応させれば，L' から L の上への，いわゆる**逆写像** $f^{-1}: f^{-1}(u)=x$ が得られ，これが再びラティス同型写像である．このような f, f^{-1} が存在するときは，L と L' とはラティスとして同じ構造を持つと考えられるので，L と L' とはラティスとして**同型**であるという．上の D と $f(L)$ とは同型である．

ラティスの元と単項 ideal との対応も１つのラティス同型対応であって，単項 ideal の全体は ideal 全体のラティスにおける部分ラティスをなす．そして，ideal 全体のラティスにおいて成り立つ恒等式は，もちろん単項 ideal 全体のラティスでも成り立つから，もとのラティスでも成り立つ．そこで前節の結果と考えあわせて，結論を簡単に述べれば

任意のラティスとその ideal 全体のラティスは同じ恒等式をもつ

ということになる．

ラティス L からラティス L' の上への準同型写像が存在するとき，L' は L にラティスとして **準同型** であるという．これらが同型でなければ，L' は L の見取図のようなもの，だいたいの構造を示すものと考えてよい．準同型の関係は同型のように相互的ではない．しかし次の意味で，L' は L の順序関係をだいたい反映する．すなわち L において $x \leqq y$ ならば，L' において $f(x) \leqq f(y)$ となることが，

$$f(x) = f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$$

によって知られる．逆に L' の元 u, v の間に $u \leqq v$ なる関係があるとき，$x \leqq y$, $f(x) = v$, $f(y) = v$ なる L の元 x, y が存在することも，まず $f(x') = u$, $f(y') = v$ なる元 x', y' をとって

$$x = x', \quad y = x' \cup y' \qquad \text{あるいは} \qquad x = x' \cap y', \quad y = y'$$

と置いて知られる．

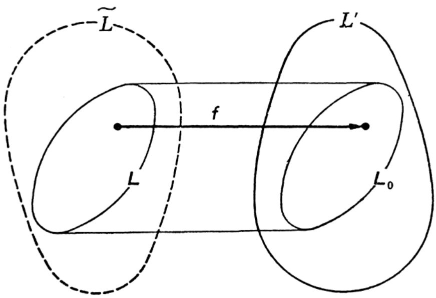


図 3.1

なお，これは既に切断の項でいうべきであったが，ラティスの拡張について一言しておく．ラティス L がラティス L' の部分ラティスであるとき，L' を L の**拡張**という．ラティス L の拡張を考えること，あるいは拡張を定義することを，L を**拡張する**という．いまこの関係にあるラティスと限らず，ラティス L がラティス L' のある部分ラティス L_0 と同型であるとして，L の拡張で L' と同型なものを作ることを試みよう．それには

L' から L_0 を取り除いた残り $L'-L_0$ を L に付け加える

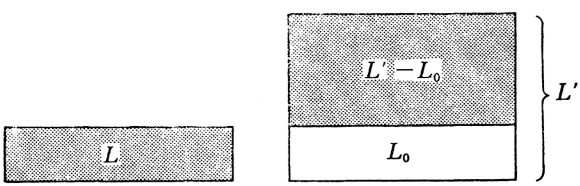


図 3.2

という方針をとればよさそうにみえる．しかし，$L'-L_0$ と L とに共通な元があると，都合が悪い．方針をすこし変更して，まず次のような集合 L'' をとる：

iii) $\begin{cases} L' \text{ から } L'' \text{ の上への 1 対 1 の対応 } g \text{ がある．} \\ L \text{ と } L'' \text{ とに共通な元はない．} \end{cases}$

存在証明は本節末の注にゆずり，ここでは上のような L'' の存在を仮定して

$$\tilde{L}=(L''-g(L_0))\cup L$$

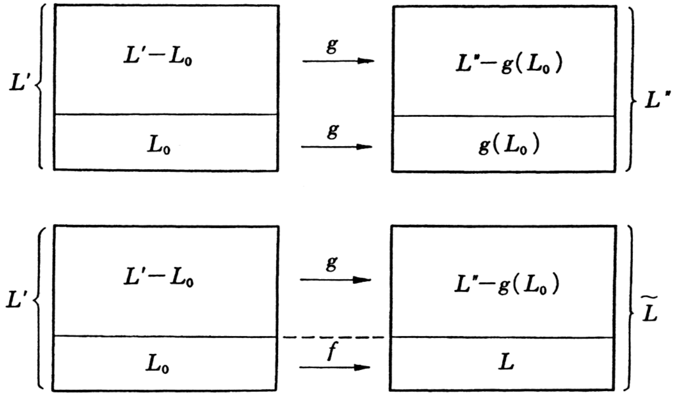


図 3.3

と置く．一方，L_0 から L へのラティス同型対応を f として，写像 h を

$$x \in L'-L_0 \quad \text{ならば} \quad h(x)=g(x)$$
$$x \in L_0 \quad \text{ならば} \quad h(x)=f(x)$$

と定義する．この h は L' から $\tilde{L}$ の上への 1 対 1 の写像になるから，これによって L' から $\tilde{L}$ にラティス演算を導入して，L' と $\tilde{L}$ を同型なラティスにすることができる．特に L の元 a, b については，この新しいラティス $\tilde{L}$ の元としてのラティス演算 $a\cap b$, $a\cup b$ は，L_0 から f によって導入されるが，それは初めからラティス L において定まっていたラティス演算にほかならない．

ゆえに L は $\tilde{L}$ の部分ラティス，$\tilde{L}$ は L の拡張であり，$\tilde{L}$ と L' は同型である．

数学において重要なのは個々の元ではなく，元と元との関係，集合としての構造なのであるという立場から，たとえば同型なラティスはしばしば同一のラティスとみなされる．かように**同一視する**立場からすれば，上のように L' を $\tilde{L}$ で置き換えることはむしろ不自然であって，端的に“L' は L の拡張である”といってよろしいであろう．

この意味で，あるラティス L の切断のラティス，ideal のラティスはいずれも L の拡張であり，L に適当に元をつけ加えて完備にしたものである．

もしも順序集合としての構造のみに着目すれば，切断の全体は，切断 $\langle X, Y\rangle$ の第1項 X の全体を集合の包含関係とともに考えたものと同型である．かような X は $(X^*)_*=X$ なる L の部分集合として特徴づけられ（Y は X^* として求められ）るが，一般に L の任意の部分集合 Z に対して Z_* は L の ideal となるから，かような X は ideal である．したがって，上のような立場に立てば，切断のラティスとは $(X^*)_*=X$ なる ideal の全体を包含関係で順序づけたものであるといってよい．

注　任意に定められた集合 L, L' に対して，前記 iii) の性質を有する集合 L'' が存在することを証明しよう．

L の部分集合 A を定めておいて

$$g(x)=\langle x,\ A\rangle \quad (x\in L'), \qquad L''=\{g(x)\,|\,x\in L'\}$$

と定義すれば，g は L' から L'' の上への1対1の対応である．A を適当にとって，L と L'' とに共通な元がないようにすれば，証明は終わる．L の元であって次の形に表わされる u の全体を A とする：

$$u=\langle y,\ B\rangle, \quad B\subseteqq L, \quad u\notin B. \qquad (*)$$

この A について，L と L'' とに共通な元 v があったとしてみよう．v は $v=\langle x,\ A\rangle$ と表わされる．ここで $v\in A$ と仮定すれば，v は（$*$）の u の形にも表わされることになり，そのとき

$$\langle x,\ A\rangle=\langle y,\ B\rangle$$

により $A=B$ となり，（$*$）の $u\notin B$ を $v\notin A$ と書き直すことができて，仮定に反する．ゆえに仮定 $v\in A$ は誤りであり，

$$v=\langle x,\ A\rangle, \qquad A\subseteqq L, \qquad v\notin A$$

となるが，これは v が（$*$）の形に表わされることを示すから，$v\in A$

となって矛盾する．ゆえに，L と L'' とに共通な元はない．

§14. 直　　積

話があまり完備化に即しすぎたようである．ラティスの一般論としては，たとえば ラティス合同のなすラティス に関する中山，船山両氏によるおもしろい結果なども 述べてよいであろうが，いまは 割愛する．ただ，直積のことに 触れなければ 一般論はすこぶる不備となろう．今度は，例を挙げることは後まわしにして，一挙に一般的定義にはいる．

集合 R を定義域とする関数が R の各元 α に関数値 x_α を対応させるとき，この関数を記号 $[x_\alpha|\alpha\in R]$ で表わそう．いま $[L_\alpha|\alpha\in R]$ を集合値関数，すなわち値 L_α がすべて 集合である関数とする．このとき，

$$R \text{ の各元 } \alpha \text{ に対して } x_\alpha\in L_\alpha$$

という条件を満たす関数 $[x_\alpha|\alpha\in R]$ の全体 D を，$[L_\alpha|\alpha\in R]$ の **直積** (direct product) という．また各 L_α を D の **直積因子** という．特にどの直積因子もそれぞれラティスをなしているとき，D の元

$$x=[x_\alpha|\alpha\in R],\qquad y=[y_\alpha|\alpha\in R]$$

に対して演算 $x\vee y$, $x\wedge y$ を次のように定義すれば，演算の結果はまた D に属する：

$$x\vee y=[x_\alpha\vee y_\alpha|\alpha\in R],\qquad x\wedge y=[x_\alpha\wedge y_\alpha|\alpha\in R]$$

この演算が導入された D を **ラティスの直積** という．

ラティスの直積においては，任意のラティス多項式 P に対しても

$$P([x_\alpha|\alpha\in R],\ [y_\alpha|\alpha\in R],\cdots\cdots)=[P(x_\alpha,\ y_\alpha,\cdots\cdots)\,|\alpha\in R]$$

となることが 定義から直ちに知られる．したがって，もし ある一定のラティス恒等式がすべての直積因子において成立すれば，同じラティス恒等式が直積においても成立する．特にラティスを特徴づける交換律，結合律，吸収律は必ずラティスの直積において成立する．したがってラティスの直積はラティスをなす．そこで直積 D において $x\leqq y$ なる順序関係を考えてみよう．それは $x\vee y=y$ すなわち "すべての α に対して $x_\alpha\vee y_\alpha=y_\alpha$" を意味するが，後者は "すべての α に対して $x_\alpha\leqq y_\alpha$" と同等である．

これは順序集合の直積の考えを暗示する．さきほどの直積因子 L_α の

各々を単に順序集合（ラティスと仮定せず）とするとき，D において

すべての α に対して $x_\alpha \leqq y_\alpha$

を $x \leqq y$ で表わせば，これが D を順序づけることは直ちに知られる．こうして順序づけられた D を**順序集合の直積**という．各因子がラティスをなす場合には，順序集合の直積としての順序と，ラティスの直積として演算から導かれた順序とは一致する．

順序集合の直積 D の部分集合 X と，D の元 $a=[a_\alpha|\alpha \in R]$ とについて，“a が X の上界である”という条件を考えよう．それは

“X のすべての元 x に対して $x \leqq a$”

ということ，すなわち

“X のすべての元 x と R のすべての元 α とに対して $x_\alpha \leqq a_\alpha$”

を意味する．そこで

$$X_\alpha = \{x_\alpha | x \in X\}$$

と置けば，上の条件は

“すべての α に関して a_α が X_α の上界である”

と同等である．双対に，下界についても同様である．このことによって，もし各々の α に対して $\sup X_\alpha$ が存在すれば $\sup X$ も存在し，また逆も成立し，$\sup X = [\sup X_\alpha | \alpha \in R]$ であることが知られる．inf についても同様．したがって

特に（条件的）完備ラティスの直積は（条件的に）完備である．

重要な例として，R も各 L_α もそれぞれ実数の全体である場合を考える[1]．各因子 L_α は数の大小関係を順序として条件的に完備なラティスをなす．その意味で直積 D は条件的に完備なラティスをなす．これは**関数ラティス**とよばれるものの一種である．関数のグラフを描くならば，ラティス演算は図 3.4 のようになる．関数に対してそのグラフの下

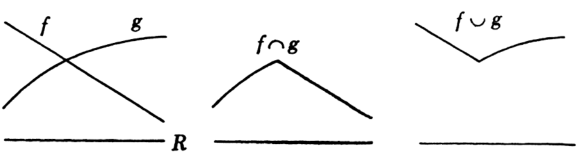


図 3.4

1）　実数の全体という同一の集合に，R とか L_α とか，いろいろな名が付くわけである．

方にある点の全体から成る集合を対応させれば，関数ラティスと集合ラティスの同型対応が得られる．連続関数の全体，Riemann 積分可能な関数の全体，Lebesgue 可測関数の全体なども関数ラティスをなし，上述のラティスの部分ラティスである．

また L_α はそのままとし，R としてたとえば数 1，2 の対 $\{1, 2\}$ をとっても，他の例ができよう．このとき D の元 $x=[x_\alpha|\alpha=1,2]$ に順序対 $\langle x_1, x_2\rangle$ を対応させれば，実数の順序対全体と D との 1 対 1 の対応が得られる．そこで，対応するものを同一視して，順序対の全体が D であると考え，これを特に $L_1\times L_2$ で表わし，L_1 と L_2 との**直積**といってもよいであろう．その元 x は，平面上に直角座標を定めておけば，平面上の点で表わされよう．x_1，x_2 はそれぞれ第 1 座標，第 2 座標である．この場合に，$x\leqq y$ は "点 x から見て第 1 象限の向きに点 y がある" ことである．

この例にならって，一般の直積においても x_α を x の α **座標**，あるいは α **成分** (component) ということがあり，直積の部分集合 X に対して直積因子 L_α の部分集合 $X_\alpha=\{x_\alpha|x\in X\}$ を X の (L_α への) **正射影**あるいは**射影**ということがある

また，R は素数の全体とし，各 L_α は素数 α の整数乗の全体

$$\{\cdots\cdots,\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-1},\ \alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \cdots\cdots\}$$

を大小関係で順序づけたラティスとしてみよう．このときの直積 D の元 $x=[x_\alpha|\alpha\in R]$ について，$x_\alpha=1$ $(=\alpha^0)$ でない α は有限個しかない場合を考え，このような元 x の全体を E とすれば，E は D の部分ラティスをなす．E の元 x に対し，1 に等しくない x_α をすべて掛け合わせた積を $f(x)$ としよう[1]．こうして得られた $f(x)$ は正の整数を分母子とする分数，すなわち正の有理数であるが，これであらゆる正の有理数がつくされ，x と $f(x)$ とは 1 対 1 に対応する．$x\leqq y$ は有理数のほうでいえば $f(y)/f(x)$ が整数であること，すなわち $f(x)$ で $f(y)$ が割り切れることである．したがって正の有理数全体が，"割り切れる" を順序としてラティスをなす．特に自然数は，対応する E のほうでいえば，どの成分も 1 以上である元に相当し，その全体は明らかに部分ラティスをなす．そこでは，最小公倍数がジョイン，最大公約

1) ただし 1 に等しくない x_α がなければ，$f(x)=1$ とする

数がミートである．

この解釈は何でもないことであるが，割り切れるという整数論的な概念を関数ラティスにおける順序，したがってグラフの上下のように図形的なものに翻訳する手段を与えたことになっている．関数ラティスの一般論がそこに適用できるわけであるが，それは応用としては，そのままでは単純にすぎる．

§15. ラティス恒等式，ラティス包含式

ラティス恒等式やラティス多項式の例をあげなければ，これまでの所論は歯がゆいものであろう．それの例に関連して，ラティス包含式にも一言触れねばならない．**ラティス包含式**とは，ラティス多項式を $\leqq$ または $\geqq$ で結んだ，たとえば $P \leqq Q$ のようなものである．それは，条件と考えれば，等式 $P \vee Q = Q$ とも $P \wedge Q = P$ とも同等である．

ラティス包含式を証明する普通の方法は，次の簡単な原理を繰り返して用いることである．

Ⅰ．$x \leqq x'$，$y \leqq y'$，……ならば，いかなるラティス多項式 P についても

$$P(x,\ y, \cdots\cdots) \leqq P(x',\ y', \cdots\cdots)\ .$$

これは ideal のラティスのところで既に述べた．

Ⅱ．ラティスの任意の元 x に対して，$x \leqq x'$ なる元 x' の一般型は

$$x' = x \vee y \qquad (y \text{ は同じラティスの任意の元})$$

である．

実際，$x \leqq x'$ ならば $y = x'$ と置くことによって $x' = x \vee y$ となるし，逆に $x' = x \vee y$ ならば $x \leqq x'$ である．

Ⅱ′．Ⅱの双対．

Ⅲ．いかなるラティス多項式についても

$$P \leqq P \vee Q, \qquad P \geqq P \wedge Q\ .$$

Ⅳ．$x \leqq x'$，$x \leqq x''$　ならば　$x \leqq x' \wedge x''$；およびその双対．

これは定義そのものである．これを繰り返し用いれば

Ⅴ．x，y，……　のすべてに対して $\leqq u$，v，……　ならば

$$x \vee y \vee \cdots\cdots \leqq u \wedge v \wedge \cdots\cdots\ .$$

ここで x，y，……，u，v，……　のところにラティス多項式を代入して

もよいことはいうまでもない．

等式 $P=Q$ は“$P\leqq Q$，かつ $Q\leqq P$”と同等であるから，上の諸原理は等式の証明にも役立つ．

次に述べるいろいろな包含式は，しばしば断わりなしに用いられる．まず $x\wedge y$，$x\wedge z$ に対して $\leqq x$，$y\vee z$ であるから，V によって

$$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\leqq x\wedge(y\vee z)$$

これと双対に

$$x\vee(y\wedge z)\leqq(x\vee y)\wedge(x\vee z).$$

同様に V を用いて

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)\leqq(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

これら 3 通りの包含式は，いかなるラティスのいかなる元 x，y，z についても成り立つ．その意味で **絶対包含式** といってよいであろう．これらの 3 式を **分配包含式** という．

分配包含式の第 1 式の z に $x\wedge z$ を代入し，第 2 式の z に $x\vee z$ を代入して，次の 2 つの絶対包含式を導くことができる．

$$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\leqq x\wedge(y\vee(x\wedge z))$$
$$x\wedge(y\wedge(x\vee z))\leqq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

この 2 つを **modular 包含式**という．

上述の II. によれば modular 包含式はいずれも

$$x\leqq z \quad ならば \quad x\vee(y\wedge z)\leqq(x\vee y)\wedge z$$

という形に書かれる．これに対して

M_1. $\quad(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=x\wedge(y\vee(x\wedge z))$

M_2. $\quad x\vee(y\wedge(x\vee z))=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

M_3. $\quad x\leqq z$ ならば $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$

という条件を考えよう．M_1 をラティス恒等式と考えれば，すなわち“いかなる元 x，y，z に対しても”という前書きを補って考えれば，それは与えられたラティスの構造についての条件である．このように解釈された M_1，M_2，M_3 を，いずれも **modular 律**という．上述の原理 II によって modular 律 M_2 と modular 律 M_3 とは同等である．M_3 は自己双対であるから，同じく modular 律 M_1 とも同等である．したがって，これらの 3 法則は同等である．これらの modular 律を満たすラティスが **modular ラティス**である (32 ページ)．応用上に現われるラティ

スの多くは modular ラティスである．

応用上に現われるラティスが，次の意味で分配的なラティスである場合も多い．分配包含式を等式にした

D₁.　$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$,

D₂.　$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

D₃.　$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$

を恒等式と考えるとき，おのおのを **分配律** という．分配律の3法則も互いに同等であることが以下に証明される．これらを満たすラティスを**分配的なラティス**という．

まず，分配包含式から modular 包含式を得たのと同様な方法で，分配律 D_1 からは M_1 が，分配律 D_2 からは M_2 が得られる．また，分配律 D_3 が成り立つラティスでは，$x \leqq z$ の場合を考えれば，D_3 において

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x \\ &= (x \wedge y) \vee x \vee (y \wedge z) = x \vee (y \wedge z),\end{aligned}$$

双対に

$$\text{右辺} = (x \vee y) \wedge z.$$

ゆえに M_3 が成り立つ．

こうして，恒等式 D_1, D_2, D_3 の1つが成り立つラティスは modular ラティスになる．modular 律を用いると，分配律の1つから他の2つを導き出すことは簡単な計算で行なわれる．しかし，もう少し精密に

　modular ラティスにおいては，3条件 D_1, D_2, D_3 のうちどれか1つを満たす元 x, y, z は他の2つをも満たす

ということを証明しよう．今度は，各条件 D_i をラティス恒等式とは考えないで，ラティスの元 x, y, z についての条件と考えるわけである．これを強調する場合には D_i を $D_i(x, y, z)$ とも書くことにする．

まず，次のことに注意しよう．

　D_1 と D_2 は互いに双対であり，D_3 は自己双対である．
　$D_1(x, y, z)$ または $D_2(x, y, z)$ において y, z を入れ換えても，$D_3(x, y, z)$ において x, y, z を任意に並べ換えても，それぞれ，もとと同等な条件になる．

さて，考えるラティスは modular ラティスであるとする．まず，条件

$D_1(x, y, z)$ を仮定すれば

$$\begin{aligned}(y \vee x) \wedge (y \vee z) &= y \vee (x \wedge (y \vee z)) && \text{modular 律 } M_2 \\ &= y \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) && D_1(x, y, z) \\ &= (y \vee (x \wedge y)) \vee (x \wedge z) && \text{結合律} \\ &= y \vee (x \wedge z) && \text{吸収律}\end{aligned}$$

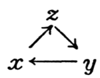
から $D_2(y, x, z)$ を得る．ゆえに $D_1(x, y, z)$ から $D_2(y, z, x)$ が導かれる．このことを次のように書き表わそう．

$$D_1(x, y, z) \longrightarrow D_2(y, z, x)$$

これと双対に

$$D_2(x, y, z) \longrightarrow D_1(y, z, x)$$

すなわち，D の添字 1 と 2 を入れ換えれば，文字 x，y，z を環状に



と置き換えてよい． これを 3 度繰り返せば，文字 x，y，z の順はもとのとおりで，D の添字が入れ換わる：

$$D_1(x,y,z) \longrightarrow D_2(x,y,z), \qquad D_2(x,y,z) \longrightarrow D_1(x,y,z)$$

ゆえに条件 D_1 と D_2 は同等である．入れ換えをできるだけ行なってみれば（第 2 字と第 3 字を入れ換えてもよいことを用いて），条件中の文字の順序が問題にならないことも知られる．

これらの条件を仮定すれば，$y \wedge z \leqq y \vee z$ と modular 律によって

$$\begin{aligned}&(y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ &\quad = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) \\ &\quad = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) = (y \vee x) \wedge (z \vee x) \wedge (y \vee z)\end{aligned}$$

これを整理すれば $D_3(x, y, z)$ を得る．逆に D_3 を仮定すれば

$$\begin{aligned}x \vee (y \wedge z) &= x \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \\ &\qquad (\because\ x \geqq x \wedge y,\ z \wedge x) \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)) \\ &\qquad (D_3(x, y, z) \text{ による}) \\ &= x \vee ((y \vee z) \wedge ((x \vee y) \wedge (z \vee x))) \\ &\qquad (\text{交換律，結合律}) \\ &= (x \vee (y \vee z)) \wedge ((x \vee y) \vee (z \vee x)) \\ &\qquad (x \leqq (x \vee y) \wedge (z \vee x) \text{ と } M_3)\end{aligned}$$

$$=(x \cup y) \cap (z \cup x)$$

$$(\because \quad x \cup (y \cup z) = x \cup y \cup z \geqq x \cup y, \ z \cup x)$$

によって $D_2(x, y, z)$ を得る.

これで modular ラティスにおいては $D_1(x, y, z)$, $D_2(x, y, z)$, $D_3(x, y, z)$ が互いに同等であることが知られた. 恒等式 D_1, D_2, D_3 のおのおのから modular 律が導かれるから, これらの恒等式が互いに同等であることも同時に結論される.

なお, "いかなる元 x, y, z についても

$$(x \cup y) \cap z \leqq x \cup (y \cap z)$$

が成り立つ" という条件——Bowden の条件という——も分配律と同等である. 同等の証明は簡単であるが省く. 分配的なラティスは modular ラティスであることだけは記憶されたい. この関係にちなんで modular 律を **弱分配律** ということもある.

第4章　Zorn の lemma

§16.　Zermelo の公理と Zorn の lemma

集合 L_1 と 集合 L_2 との直積 $L_1 \times L_2$ は順序対の集合

$$\{\langle x_1, x_2 \rangle \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

と考えてもよかった．もし L_1 も L_2 も有限集合であって，それぞれ n_1 個の元，n_2 個の元から成っていれば，順序対は $n_1 \times n_2$ 個ある．一般に集合値関数〔$L_\alpha | \alpha \in R$〕の定義域 R が有限集合，おのおのの値 L_α は n_α 個の元から成る有限集合ならば，その直積は n_α の積

$$n = \prod_{\alpha \in R} n_\alpha$$

を元の個数とする有限集合である．これが直積の名称の由来であろう．特にどの n_α も 0 でなければ，すなわちどの L_α も空でなければ，n も 0 でない，すなわち直積は空でない．R が有限集合であって，L_α の中に無限集合があれば，直積も無限集合である．R が無限集合であるとき，どの L_α も空でないならば直積も空でないか？　それは自明のこと，ないし証明できることのように思われよう．これは今日までに証明されたことのないものである．自明のことかといえば，よく考えるとそうでもないことが知られる．詳細な議論に立ち入れば数学基礎論に飛び込んでしまうから，それは避けるが，ある意味で上のことを公理として採用してさしつかえないことが知られている．

このことを，R を集合族とし，$L_\alpha = \alpha$ と置いていい直せば，**Zermelo の公理**あるいは**選択公理**（axiom of choice, Auswahlaxiom）といわれるものになる．集合族 R に対して，関数〔$x_\alpha | \alpha \in R$〕が，R のいかなる元 α に対しても $x_\alpha \in \alpha$ であるという性質を持つとき，この関数を R の**選択関数**（Auswahlfunktion）という．Zermelo の公理とは

　空でない集合族の各元が空でないとき，その集合族の選択関数が少なくも 1 つ存在する

という公理である．

Zermelo は彼の**整列可能定理**（Wohlordnungssatz）の証明に当たって，この公理を提出して数学界の物議をかもした．一見当然な公理から思いがけない結果が証明されたので，もとの公理まで疑われたのである．それに対して Zermelo は，公理の主張を弱めたもの，したがってますます当然らしくみえる公理から，初めの公理が証明されることを示し，更に整列可能定理の第2の証明を公にした．その後，数学の諸部門の分析と批判によって，Zermelo の公理を（たとい，いくぶん制限した形にせよ）用いずには，無限を取り扱う理論の大部分が失われることが知られた．一方，積極的にこの公理と整列可能定理を用いることによって，実に豊富な結果が得られ，数学の大きな発展がもたらされた．

整列可能定理のおもな用途は種々の存在定理の証明にある．ところがその使われ方はだいたい一定していて，しかもなかなか繁雑である．そこに着目して M. Zorn が，今では Zorn の lemma といわれる一系の定理を提出し，選出公理から証明して以来，整列可能定理に代わってこれが盛んに用いられ，多くの証明が簡単にされた．実は Zorn の lemma，整列可能定理，Zermelo の公理は互いに同等であるが，特に最初の両者は一方から他方が互いに容易に導かれるのである．

Zorn の lemma の1つの形 Z_1 をあげよう．

定義　集合族 F が次の性質を持つとき，F は **finite character** の集合族であるという．

> 集合 X が F に属するための必要 かつ 十分な条件は，X の有限部分集合——すなわち X の部分集合であって有限集合であるもの——がすべて F に属することである．

Zorn の lemma　$\mathbf{Z}_1$：Finite character を持つ集合族 F が空でないときは，集合の包含関係について極大な元が F の中にある．

すなわち，$M \subseteq X \in F$ ならば必ず $X=M$ であるような F の元 M（極大元）が存在するというのである．

Z_1 を証明するために，まず，f チェインというものを定義しよう．

集合 S のベキ集合 $2^S=\{X|X\subseteq S\}$ を定義域とする関数 f が与えられ，その値 $f(X)$ はすべて S の元であるとする．この f に対し，2^S の部分集合であって次の条件 i），ii）を満たす C を，***f* チェイン**という．

i) $X \in C$ ならば $X \cup \{f(X)\} \in C$

ii) $D \subseteq C$, $D \neq \emptyset$ ならば $\bigcup D \in C$

たとえば 2^S 自身が1つの f チェインである．

上記の f と，S の部分集合 A とを定めておき，A を元とする f チェインの全体を Γ としよう．すなわち

$$\Gamma = \{C \mid C \text{ は } f \text{ チェインであって，} A \in C\}$$

たとえば 2^S が Γ に属するから，Γ は空でない．Γ の共通部分

$$C_0 = \bigcap \Gamma$$

もまた f チェインであることは，定義から直ちに知られる．この C_0 は集合の包含関係 $\subseteq$ について Γ の最小元である．すなわち C_0 は A を元とする最小の f チェインである．これについて次の lemma（補助定理）Z_0 が証明される．

Z_0: A を含む最小の f チェイン C_0 は集合の包含関係について全順序集合をなす．

証明には節をあらためる．われわれの証明の筋道は Zermelo の整列可能定理の第2の証明に平行したものである．

§17. lemma の証明

Lemma Z_0 の証明 ここでは Zermelo の公理は使用されない．

最初に，$\{X \mid A \subseteq X \subseteq S\}$ が1つの f チェインであることは明白で，それは A を含むから，C_0 はこれの部分集合であり，したがって

$$X \in C_0 \quad \text{ならば} \quad A \subseteq X$$

であることに注意する．

$X \subseteq Y$ または $Y \subseteq X$ であるとき，X と Y とは**比較可能**であるといおう．C_0 の元であって C_0 のすべての元と比較可能なものを **normal** であるといおう．C_0 が全順序集合であるという主張は，C_0 のすべての元が normal であるということにほかならない．特に上の注意によって，A は normal である．そこで，normal な元の全体を N で表わして，N が f チェインであることを示せば $C_0 \subseteq N$，すなわち C_0 のすべての元が normal であることとなり，目的は達せられる．

定義によって，N が f チェインであるということは，次の2つの主張に分かれる：

I) P が normal ならば $P \cup \{f(P)\}$ も normal である.

II) 空でない集合族 D の元がすべて normal ならば, $\bigcup D$ もまた normal である.

I) **の証明** P が normal であるとする. このとき $P \in C_0$, したがって $P \cup \{f(P)\} \in C_0$ であるから, **I**) の主張は, $P \cup \{f(P)\}$ が C_0 のすべての元と比較可能であるということにほかならない. 次の条件 α), β) の中で α) からは $X \subseteqq P \cup \{f(P)\}$ が結論されるから, これらの条件 α), β) のいずれかを満たす C_0 の元 X の全体を C として, $C_0 \subseteqq C$ が証明されれば, $P \cup \{f(P)\}$ が normal であることがわかる:

α) $X \subseteqq P$ 　　　　β) $P \cup \{f(P)\} \subseteqq X$

ところで $P \in C_0$ により $A \subseteqq P$ であるから $A \in C$. そこで, C が1つの f チェインであることを示せばよい. それを書き下ろしてみると, 次の I.a) と I.b) を証明することになる:

I.a) $X \in C$ ならば $X \cup \{f(X)\} \in C$.

I.b) $E \subseteqq C$, $E \neq \emptyset$ ならば $\bigcup E \in C$.

I.a) **の証明** $X' = X \cup \{f(X)\}$ と置く. 仮定 $X \in C$ と C の定義によれば X は C_0 の元であるが, C_0 は f チェインであるから, X' も C_0 の元である. P は normal であるから P と X' は比較可能である. $X' \subseteqq P$ ならば $X' \in C$. そうでなければ $P \subset X'$ であるが, ここで仮定 $X \in C$ を場合 α), β) に分けて考える. α) の場合には, X' と X の違いがただ1つの元だけであることから, $X = P$ が結論される. ゆえに, α) と β) のいずれにしても, $P \cup \{f(P)\} \subseteqq X'$, したがって $X' \in C$.

I.b) **の証明** 仮定 $E \subseteqq C$ によると, E の各元 X に対して, α) か β) が成り立つ. ゆえに, E のすべての元 X に対して α) が成り立つか, または E のある元 X に対して β) が成り立ち, それに応じて

$$\bigcup E \subseteqq P \quad \text{または} \quad P \cup \{f(P)\} \subseteqq \bigcup E$$

となる. また C の定義によって $E \subseteqq C_0$ でもあるから, 仮定 $E \neq \emptyset$ により $\bigcup E \in C_0$ となる. ゆえに $\bigcup E \in C$.

これで **I**) は証明された. 残る **II**) の証明も **I.b**) と同様に次のとおり:

D のすべての元が normal であるという仮定により, $D \subseteqq C_0$ である.

また，C_0 の任意の元を Y とすれば，上の仮定によって，D のすべての元 X に対して $X \subseteqq Y$ であるか，または D のある元 X に対して $Y \subseteqq X$ であり，それに応じて $\bigcup D \subseteqq Y$ または $Y \subseteqq \bigcup D$ となる．ゆえに $\bigcup D$ は C_0 のどの元とも比較可能である．一方 $D \subseteqq C_0$ と仮定 $D \neq \emptyset$ により $\bigcup D \in C_0$ であるから，$\bigcup D$ は normal である．

これで lemma Z_0 の証明は終わった．

さて，空でない集合族 L が集合の包含関係について全順序集合をなしているとし，M は $\bigcup L$ の有限部分集合としよう．このとき L のある元 X に対して $M \subseteqq X$ となることを，M の元の個数についての数学的帰納法で証明することができる．実際，M の元の個数が 0 または 1 の場合は問題ない．個数 n の場合について上のことを仮定し，個数 $n+1$ の場合を考えよう．M の 1 つの元を a とすれば，上の仮定と $a \in \bigcup L$ により，

$$M-\{a\} \subseteqq Y \in L, \qquad a \in Z \in L$$

なる Y，Z が存在することになる．L は集合の包含関係について全順序集合をなしているから，$Y \subseteqq Z$ または $Z \subseteqq Y$ であり，それに応じて $M \subseteqq Z$ または $M \subseteqq Y$ となり，個数 $n+1$ の場合にも上のことが成り立つ．（証明終）

上のことから直ちに，finite character を持つ集合族の，次の性質が導かれる：

(*) F が finite character を持つ集合族で，$\emptyset \neq L \subseteqq F$，かつ L が集合の包含関係によって全順序づけられていれば，$\bigcup L \in F$ である．

いよいよ Zorn の lemma **$\mathbf{Z}_1$ の証明**に移る．与えられた集合族 F が finite character を持つとして，F がただ 1 つの元しか持たない場合は自明であるから，F は少なくも 2 つの元を持つとする．したがって F は少なくも 1 つの空でない元 A を持つ，A の 1 つの元を a とする．以下 a と A は固定して置く．

$S=\bigcup F$ と置けば $F \subseteqq 2^S$ である．2^S から空集合を取り除いた集合族を考え，φ をこれの選択関数とする：

$$\emptyset \neq X \subseteqq S \text{ に対し } \varphi(X) \in X.$$

また $X \subseteqq S$ に対して $\psi(X)$ と $f(X)$ を次のように定める：

$$\psi(X)=\{x|X\cup\{x\}\in F,\ x\notin X\}\quad(したがって\ \psi(X)\subseteqq S)$$

$$f(X)=\begin{cases}a & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \psi(X)=\emptyset\ の場合\\ \varphi(\psi(X)) & \cdots\cdots\cdots\ \psi(X)\neq\emptyset\ の場合\end{cases}$$

したがって，$A\subseteqq X\in F$ ならば $X\cup\{f(X)\}\in F$ となる．

この S, f, A に対し，A を元とする最小の f チェインを C_0 とし，

$$C=C_0\cap F$$

と置く．C も A を元とする f チェインであることを示そう．$A\in C$ は明白である．$X\in C$ に対し，$X\cup\{f(X)\}$ が C に属すること，すなわち C_0 と F に属することは，$X\in C_0$ と $A\subseteqq X\in F$ から知られる．$\emptyset\neq D\subseteqq C_0$ とすれば，$D\subseteqq C_0$ により $\bigcup D\in C_0$ である．集合の包含関係により C_0 が全順序づけられるから，D も全順序づけられ，一方 $D\subseteqq F$ であるから，上に述べた F の性質 (*) により $\bigcup D\in F$, したがって $\bigcup D\in C$ となる．ゆえに C は f チェインである．

C が A を含む f チェインであるから $C_0\subseteqq C$ （実は $C_0=C$）となる．ゆえに，前ページ (*) における仮定は $L=C_0$ に対して成立する．そこで $M=\bigcup C_0$ と置けば $M\in F$, $M\in C_0$, したがって順に

$$M\cup\{f(M)\}\in C_0$$

$$M\cup\{f(M)\}\subseteqq\bigcup C_0=M$$

$$f(M)\in M$$

が導かれる．$f(X)$ の定義からみて，$\psi(X)\neq\emptyset$ ならば $f(X)\notin X$. ところが $f(M)\in M$ であるから，$\psi(M)=\emptyset$ が結論される．

さて，finite character を持つ集合族 F について

$$Y\subseteqq X\in F\quad ならば\quad Y\in F$$

となることは，Y の有限部分集合を考えれば直ちに知られる．そこで，$M\subseteqq X\in F$ のとき，X の任意の元 x に対して $M\cup\{x\}\in F$ となる．ここで仮りに $x\notin M$ とすれば，ψ の定義により $x\in\psi(M)$ となって，前記の $\psi(M)=\emptyset$ に反するから，必ず $x\in M$ となる．したがって $M=X$.

ゆえに M は F の極大元である．これで Z_1 の証明は終わった．

全順序づけられた集合族の性質と，finite character を持つ集合族の性質で，この証明の途中に用いたものは，ほかの場合にもしばしば利用される．

§ 18. lemma の変形

lemma の証明の途中で現われた事実から，次の概念が自然に導かれよう．

順序集合 L が次の性質を持つとき，L は **inductively** に順序づけられているという：

L の空でない部分集合 D が L の順序に関して全順序集合ならば，L における最小上界 $\sup D$ が存在する．

たとえば，finite character を持つ集合族が集合の包含関係に関して inductively に順序づけられていることは，$\sup D = \bigcup D$ として知られる．そこで，もし次の lemma Z_2 が証明されれば，Z_1 も簡単に導かれる：

Z_2： inductively に順序づけられた集合 L が空でないときは，L は極大元を持つ．

これも Zorn の lemma の 1 つの形である．Z_2 を選択公理から直接に証明することもできる．それには，われわれの Z_0 に相当して

Z_0'： inductively に順序づけられた集合 L を定義域とし，関数値がすべて L の元である関数 f については，$x < f(x)$ でないような L の元 x が存在する

ことを証明すれば，後はだいたい前の証明のとおりで済む．この Z_0' の証明にも，Zermelo の公理は不要である．

しかし，ここでは Z_1 から Z_2 を導いてみよう．それには Zorn の lemma の他の形

Z_3： 任意の順序集合 L の全順序部分集合の全体を F とすれば，F は集合の包含関係に関して極大な元を持つ

を途中に置くのが便利である．

この F は空でない．たとえば $\emptyset \in F$ である．任意に F の元 X をとれば，X の有限部分集合は F の元である．逆に集合 X の有限部分集合がすべて F に属すると仮定すれば，明らかに $X \subseteqq L$ であるし，また X の元 x，y に対しては，$\{x, y\} \in F$ であるから

$$x \leqq y \quad \text{または} \quad y \leqq x$$

であって，X は全順序づけられている；ゆえに $X \in F$．すなわち F は finite character を持つ．したがって Z_1 から Z_3 が導かれる．

次に，inductively に順序づけられた空でない集合 L に対して，Z_3 を適用すれば，F の極大元 M に対しても $\sup M \in L$．ところが，もし L の元 x で $\sup M < x$ なるものがあれば，$M' = M \cup \{x\}$ は再び F の元で，しかも $M \subset M'$．これは矛盾である．ゆえに $\sup M$ は L の極大元である．したがって Z_3 から Z_2 が導かれる．

さて名称だけ紹介しておいた整列可能定理について一言する．順序集合 L において，そのいかなる空でない部分集合も最小元を有するとき，L を**整列集合**（well-ordered set）という．**整列可能定理**とは

W： いかなる集合も，ある順序に関して整列集合をなす

という定理である．

与えられた集合に適当に順序関係を定義し，その順序に関してその集合が整列集合であるようにすることを，その集合を**整列する**という．上の定理は，いかなる集合も整列しうるというのである．

整列集合の任意の部分集合に対して，特に元の対 $\{x, y\}$ に対しても，その最小元があることから，整列集合は全順序集合であることが導かれる．また整列集合の任意の部分集合は，もとの集合における順序に関して，再び整列集合である．特に整列集合 X の任意の元 a に対して，

$$\{x \mid x \in X,\ x < a\}$$

をこの意味で整列集合と考えたとき，すなわち順序とあわせて考えたとき，これを X の a による**切片**（Abschnitt）という．

切片の概念を用いて，Zorn の lemma Z_2 から整列可能定理を導くことができる．証明の概要を述べよう．

与えられた集合 E に対して，それの整列可能な部分集合 X と，X を整列する順序 ρ との組を $[X, \rho]$ で表わし，このような組の全体を L とする．L の元 U，V について，U が V の切片であるか，または $U = V$ であるということを $U \leqq V$ で表わす．この関係 $\leqq$ は L を順序づける．いま

$$\emptyset \neq D \subseteqq L, \quad D \text{ は } L \text{ の順序について全順序集合}$$

として，L における $\sup D$ の存在を示そう．$[X, \rho] \in D$ なる順序 ρ があるような X の全体を考え，これの合併集合を Z とする．Z の元 x，y に対し，上のような $[X, \rho]$ があって

$$x \in X, \qquad y \in X, \qquad x \rho y$$

となることを，xRy で表わす．このとき，ほかの〔Y, ρ'〕$\in D$ に対して $x \in Y$, $y \in Y$ ならば，$x\rho' y$ となる．このことから，R が Z を順序づけること，しかも Z が R に関して整列集合であることがわかる．〔Z, R〕は L における $\sup D$ である．

ゆえに L は inductively に順序づけられている．したがって Z_2 により L には極大元 M がある．M=〔A, $\leqq$〕とすれば，$A=E$ であることが次のようにして知られる．仮りに $A \neq E$ とすれば，E の元 a で $a \notin A$ なるものがある．$X=A \cup \{a\}$ とすれば，a による X の切片が A となるように X を整列することができて，M の極大性に反する．

整列可能定理から逆に Zermelo の公理を導くこともできる．すなわち $\emptyset \notin F$ なる集合族 F に対して，$E=\bigcup F$ と置き，E を整列し，$X \in F$ に対して X の最小元を対応させればよい．

§19. lemma の別証明

数学においては結果とともに，それに到達する筋道，方針が重要である．Zorn の lemma の別証明として，中山　正氏の方法を多少変形して紹介しよう．まず以前の Z_0' をすこし強めて，次の Z_0'' を証明する．

Z_0''：inductively に順序づけられた集合 E と，E の元 e と，関数 f が与えられ，f の定義域は E であり，f の値は E の元であるとする．このとき，$e \leqq x$ であって $x < f(x)$ でない E の元 x が存在する．

これの証明に，Zermelo の W の第1証明と同様な方法を採用する．

$x \in E$, $S \subseteqq E$ に対して

$$[<x,\ S] = \{s \mid s \in S,\ s < x\}$$

と置けば，明らかに

1)　$y < x$ ならば $[<y,\ S] = [<y,\ [<x,\ S]]$

である．E の部分集合 C で

2)　$e \in C$,

3)　$x \in C$ ならば $e \leqq x$,

4)　C は E における順序に関して整列集合をなす

ようなものを考えよう．4) によって

5) C は全順序集合である．

いま $x \in C$，かつ $e < x$ とすれば，2) によって〔$< x$，C〕は空でなく，5) によって全順序集合であるから，sup〔$< x$，C〕が存在する．

さて E の部分集合 C で条件 2)，3)，4) および条件

6) $x \in C$ かつ $e < x$ ならば $x = f(\sup〔< x, C〕)$

を満たすものを f **整列系** とよぼう．たとえば $\{e\}$ は f 整列系である．f 整列系の全体の合併集合がまた f 整列系になることを示すのが，今度の証明の眼目である．

f 整列系 C_1，C_2 が与えられたとして

7) $D = \{x \mid x \in C_1 \wedge C_2,\ [< x, C_1] = [< x, C_2]\}$

と置く．$i=1$ または $i=2$ とすると，1) によって

8) $y < x \in D$ かつ $y \in C_i$ ならば $y \in D$.

また $D \subseteqq C_i$ であるが，ここで $C_i - D$ が空でないと仮定すれば，これは整列集合 C_i の部分集合であるから最小元を持つ．それを

9) $a = \min\ (C_i - D)$

とする．D の任意の元 x は，a とともに C_i の元であるから，a と比較可能である．$a = x$ とすれば 9) に反し，$a < x$ とすれば 8) に反するから，$x < a$ である．ゆえに，D の元は $[< a, C_i]$ の元である．このことの逆は 9) から明白であり，したがって

10) $D = [< a, C_i]$

f 整列系の定義の 6) を C_i とその元 a に当てはめれば

11) $a = f(\sup D)$

いま $C_1 - D$ と $C_2 - D$ のどちらも空でないとすれば，それらは 11) によって同じ最小元 a を持ち，

$$a \in C_1 \wedge C_2, \qquad [< a, C_1] = D = [< a, C_2]$$

により a が D の元となって，9) に反する．ゆえに $C_1 - D$，$C_2 - D$ の両方とも空であるか，一方だけが空でないことになり，それに応じて

$$C_1 = C_2$$

C_1 の ある元 a に対して $[< a, C_1] = C_2$

C_2 の ある元 a に対して $[< a, C_2] = C_1$

のいずれかが成り立つ．いずれにしても，次のことが成り立つ．

12) $x \in C_1$ かつ $y \in [< x, C_2]$ ならば $y \in [< x, C_1]$.

さて f 整列系の全体の合併集合を C とし，この C がまた f 整列系——したがって集合の包含関係について最大な f 整列系——であることを示そう．定義の条件のうち 2)，3) は自明である．4)，6) を証明するために，

13)　x が f 整列系 C_1 の元ならば $[<x,\ C_1]=[<x,\ C]$

ということを証明する．$y\in[<x,\ C_1]$ ならば $y\in[<x,\ C]$ となることは，$C_1\subseteqq C$ から明白である．逆に，$y\in[<x,\ C]$ とすれば，C の定義により y は ある f 整列系 C_2 の元，したがって $[<x,\ C_2]$ の元であり，12) によって $[<x,\ C_1]$ の元である．これで 13) が証明された．

4)　の証明　　$\emptyset\neq X\subseteqq C$ として，X が最小元を持つことを証明する．仮定により，X には少なくも 1 つの元 x があり，x は C の元でもある．C の定義により x は ある f 整列系 C_1 の元であり，したがって

$$[<x,\ X]=[<x,\ C]\frown X=[<x,\ C_1]\frown X$$

ゆえに $[<x,\ X]$ は整列集合 C_1 の部分集合である．$[<x,\ X]$ が空でなければ，$[<x,\ X]$ には最小元があるが，それは X の最小元にもなっている．$[<x,\ X]$ が空ならば x が X の最小元である．

6) は 13) によって明白である．

ゆえに上記の C は f 整列系である．

f 整列系 C に対しては，$C\subseteqq E$ と 5) によって $\sup C$ が存在し，3) により $e\leqq\sup C$ であるが，ここで

$$\sup C<f(\sup C)$$

と仮定すれば $C\smile\{f(\sup C)\}$ もまた f 整列系になることは，定義から直接に知られる．この $C\smile\{f(\sup C)\}$ は C よりも大きい f 整列系である．ゆえに，最大な f 整列系を C とすれば上の仮定は成り立たない．よって Z_0'' が証明された．

この補助定理から，あるいはそれより一見弱い Z'_0 から，Zorn の lemma Z_2 は次のように簡単に証明される．

inductively に順序づけられた，空でない集合 E が与えられたとする．ここで初めて Zermelo の公理を用いて，$2^E-\{\emptyset\}$ の選択関数の 1 つ φ をとり，一方 $x\in E$ に対して

$$X=\{y \mid y\in E,\ x<y\}$$

と置き，

$$X=\emptyset \quad \text{ならば} \quad f(x)=x$$

$$X\neq\emptyset \quad \text{ならば} \quad f(x)=\varphi(X)$$

と置く．つねに $f(x)\in E$ であり，また $x\leqq f(x)$ である．そして，$x<f(x)$ でないのは $f(x)=x$ の場合，すなわち $X=\emptyset$ の場合に限る．Z_0'' によって，そのような x が存在する．それは X の定義によって E の極大元である．

第5章　分配的なラティスとブール代数

§20. ブール代数の定義と実例

ラティスの話にもどり，実例から出発して **Boolean lattice** または **ブール代数**（Boolean algebra）という概念を定義しよう．ベキ集合

$$2^A=\{X|X\subseteqq A\}$$

を集合の包含関係とともに考えて得たラティスは最小元 $\emptyset$，最大元 A を持つ．このラティスの任意の元 X の，A に関する補集合

$$Y=A-X=\{x|x\in A,\ x\notin X\}$$

はまたこのラティスの元であり，条件

$$\emptyset=X\wedge Y,\qquad X\vee Y=A$$

を満たしている．

一般に，そのとき主として考察されるラティスが最小元あるいは最大元を持つ場合に，それらをそれぞれ0あるいは1で表わすことが多い．これらの元を持つラティスにおいて

$$x\wedge y=0\quad かつ\quad x\vee y=1$$

なる元 x，y を互いに**相補的**（complementary）であるといい，一方が他方の**補元**（complement）であるという．いかなる元に対してもその元の補元が少なくも1つあるとき，そのラティスは**可補的**（complemented）であるという．可補的で分配的なラティスを**ブール代数**という．

ブール代数の例はベキ集合に限らない．

集合 A の代わりにある概念をとり，部分集合の代わりにその概念に従属する概念を考えよう．たとえば，A の代わりに“犬”を考え，“赤犬”，“片目の犬”等々を考察の対象とする．概念にそれの外延を対応させれば，集合算 $\vee$，$\wedge$ がそれぞれ接続詞“または”，“かつ”に対応するであろう．また補集合に移ることが否定“ならず”に対応するであろう．かようにして集合算に類似な**概念算**が得られる．これもブール代数の1例である．集合の包含関係 $\subseteqq$ は“ならば”に相当し，3段論法の規則は包含関係の推移律と考えられよう．

数学者の考察の対象はおよそ論理的に考えられるものすべてであって，推理の形式的法則もその例に漏れない．古くは Leibnitz が既に推理を代数的演算とみなそうと努め，その後，G. Boole によって初めて形式的推理の記号化の基礎が置かれたが，彼のいわゆる “*algebra of logic*” が上述の概念算であって，ブール代数の名もこれに由来する．

粗雑にいって，1 枚の白紙に墨で描きうる図形の全体 L も，適当な解釈のもとでブール代数の例となる．そのような図形 x の黒いところが y の黒いところからはみ出さないということを $x \leqq y$ として，順序 $\leqq$ を導入する．最小元を存在させるには，全然筆をおろさないことも描くことの1つと考えればよい．しかし，日常の感じに従って連続的な墨を想像する限り，最小元以外の図形は必ず細分できること，点のように広がりのないものは “墨で描きえない” ことに注意しよう．白紙上の点の全体を A とし，図形 x の黒いところにある点の全体という集合 $\tilde{x}$ $(\tilde{x} \in 2^A)$ を考えると，$x \leqq y$ はブール代数 2^A における順序関係に翻訳されるであろうが，図形のブール代数 L は，上の注意のような考えによれば，2^A と異なる構造を持っているのである．

位相幾何といわれる部門に親しんだ人は，この描きうる図形の代わりに，いわゆる正則開集合を持ち出すかもしれない．具体的な紙の代わりに，たとえば幾何学的な平面を取ろう．ある点Pを中心とする円の内部を，その点 P の**近傍**という．1つの点の近傍は無限に多く存在するわけである．M を平面上の点の集合とし，この M に属する点が P のいかなる近傍の中にも少なくも1つあるとき，P は M に**触れる**という．M に触れる点の全体を M の**閉包**といって，$\bar{M}$ で表わす．$M \subseteqq \bar{M}$ および $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ がいかなる点集合に対しても成り立つ．

一方，P のある近傍が完全に M に含まれるとき，P を M の**内点**といい，M の内点の全体を M の**内部**という．$\bar{M}$ の内部が M と一致するとき，M を**正則開集合**という．これは，いわば，“べたりと塗り広げられた” 集合である．

正則開集合の全体を集合の包含関係で順序づければ，ブール代数になることが，ここでは省くが，証明される．M と N のジョインは $\overline{M \cup N}$ の内部であり，ミートは共通部分である．

§21. ブール代数の特徴づけ

最小元 0 があるラティスにおいて，恒等的に

$$x \wedge 0 = 0, \qquad x \vee 0 = x$$

が成立することはいうまでもない．ジョインを和，ミートを積の形で書けば，これは普通の代数の公式と同じ形である．双対に最大元 1 があるラティスでは，恒等式

$$x \wedge 1 = x, \qquad x \vee 1 = 1$$

が成り立つが，最後の式では加法との類似が破れる．これらの恒等式は今後ひんぱんに使用されるので，わざわざしるした．

なお，補元の概念が相互的かつ自己双対的であること，したがって"可補的なラティス"や"ブール代数"という概念が自己双対的であることも，今後は断わらずに用いる．ブール代数に関して以下に述べることは，分配的なラティスの性質としてもたいせつなものを多く含んでいる．

まず 0, 1 を有する分配的なラティスにおいて，同一の元の補元は，あってもただ 1 つしかないことを示そう．そのためには，y と z がともに x の補元であることから $y=z$ を導けばよい．まず

$$\begin{aligned} y = y \wedge 1 &= y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\ &= 0 \vee (y \wedge z) = y \wedge z \end{aligned}$$

により $y = y \wedge z$；同様に $z = y \wedge z$．ゆえに $y=z$．

特にブール代数においては，任意の元 x に対して x の補元は 1 意に確定する．それを complement (補元) にちなんで x^c で表わせば，

$$(x^c)^c = x$$

である．したがって $x \to x^c$ なる対応はブール代数からそれ自身の上への対応であり，いうまでもなく 1 対 1 である．

また，分配的なラティスで

$$x \text{ と } u, \qquad y \text{ と } v$$

が互いに相補的ならば，

$$x \vee y \text{ と } u \wedge v, \qquad x \wedge y \text{ と } u \vee v$$

が相補的であることが，次のように証明される．まず

$$(x \vee y) \wedge (u \wedge v) = (x \wedge u \wedge v) \vee (y \wedge u \wedge v)$$

$$= (0 \wedge v) \vee (0 \wedge u) = 0 \vee 0 = 0$$

およびこれの双対によって

$$(x \vee y) \wedge (u \wedge v) = 0\,; \quad (x \wedge y) \vee (u \vee v) = 1\,.$$

x と u, y と v を入れ替えて

$$(u \vee v) \wedge (x \wedge y) = 0, \qquad (u \wedge v) \vee (x \vee y) = 1\,.$$ (証明終)

特にブール代数では

$$(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c, \qquad (x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$$

それゆえ，対応 $x \to x^c$ によってブール代数はそれ自身に双対なラティスと同型である．このようにジョインとミートを入れ替える効果がある対応をラティスの**双対準同型対応**といい，特に上のように1対1である場合には，**双対同型対応**という．双対準同型対応で順序は逆転する．なおベキ集合のブール代数については，上の等式は **de Morgan の法則**として知られている．

また 0, 1 がある分配的なラティス L において，補元を有する元の全体 Z は，上に述べたことによって，部分ラティスをなす．0および 1 は Z に属し，Z の最小元，最大元である．Z の元 x の L における補元はまた Z に属し，Z のにおける x の補元である．L とともに Z も分配的であるから，Z はブール代数である．この部分ラティス Z を，初めのラティスの**中心**（center）という．

一般なラティス L の部分ラティスとしてすぐに思いつくものは，

$$[a,\ b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\} \quad (\text{ただし } a \leqq b)$$

で定義される **閉区間** $[a,\ b]$ であろう．a はこれの最小元，b はこれの最大元である．この部分ラティスにおける補元を，L における補元と区別するために **相対補元**（relative complement），詳しくは b/a に相対的な補元という．記号 b/a は，$a \leqq b$ なる元 a, b の対を表わし，ラティスにおける **商** とよばれている．

分配的なラティスにおいては，閉区間もまた分配的であるから，次の意味で“相対補元が1意的”である：

そのラティスにおいて $a \leqq x \leqq b$ であるとき，x の b/a に相対的な補元は，あっても，ただ1個しかない，

すなわち

$$a = x \wedge y = x \wedge z \text{ かつ } x \vee y = x \vee z = b \qquad \text{ならば} \qquad y = z$$

逆に，相対補元が1意的であるラティスは分配的であるが，このことの証明は次節にゆずり，本節ではこれを事実と認めて話を進めよう．

上の意味で相対補元が1意的であっても，相対補元の存在が保証されるわけではない．しかし，分配的なラティスにおいては，補元があれば相対補元もある．詳しくいうと，0と1がある分配的なラティス L において，$a \leqq x \leqq b$ のとき，x の補元 y があれば x の b/a に相対的な補元 z があって，この相対補元は次の式で定められる．

$$z = a \cup (y \cap b) = (a \cup y) \cap b$$

証明は次のとおり．L では modular 律も成り立っていることに注意し，上の式で z を定めると

$$x \cap z = (x \cap a) \cup (x \cap y \cap b) = a \cup (0 \cap b) = a \cup 0 = a$$

により $x \cap z = a$ となり，また同様に $x \cup z = b$ となる．(証明終)

したがって，ブール代数のいかなる閉区間も可補的であり，これもまたブール代数になる．一般に，ラティス L のいかなる閉区間も可補的であるとき，L は**相対可補的** (relatively complemented) であるといい，更に相対補元が1意的であるときに**1意相対可補的**であるという．“相対補元が1意的”ということは，分配的なラティスの特徴であるから，“最小元と最大元があって相対補元が1意的”ということがブール代数の特徴である．

1意可補的という概念も同様に定義されるが，これだけでブール代数の特徴とすることはできない．しかし，1意可補的なラティスにおいて x の補元を x^c で表わすとき，もしも $x \to x^c$ が双対同型対応であれば，すなわち恒等式

$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c, \qquad (x \cap y)^c = x^c \cup y^c$$

が成り立てば，そのラティスは分配的であり，したがってブール代数である．このことを証明するには，相対補元の1意性を示せばよい．

証明の初めに，各元 x は x^c の補元であるから

$$x = (x^c)^c$$

が成り立つことに注意しよう．右辺の $(x^c)^c$ を x^{cc} とも書く．

次に，このラティスで $u \leqq v$ のとき

$$(u^c \cap v) \cup u = v, \qquad (v^c \cup u) \cap v = u \qquad (*)$$

となることを示そう．まず

$$w=u^c\wedge v$$

と置けば，$w\leqq v$ となり，これと仮定 $u\leqq v$ によって順次に

$$w\vee u\leqq v, \qquad w\vee u=(w\vee u)\wedge v$$

$$(w\vee u)\wedge v^c=(w\vee u)\wedge v\wedge v^c=(w\vee u)\wedge 0=0$$

を得る．また $x=x^{cc}$ の x に $(w\vee u)\vee v^c$ を代入して

$$(w\vee u)\vee v^c=((w\vee u)^c\wedge v^{cc})^c=(w^c\wedge u^c\wedge v)^c$$
$$=(w^c\wedge w)^c=0^c=1$$

結局

$$(w\vee u)\wedge v^c=0, \qquad (w\vee u)\vee v^c=1$$

となる．ゆえに $w\vee u$ は v^c の補元 v^{cc} である．すなわち

$$(u^c\wedge v)\vee u=v$$

双対に

$$(v^c\vee u)\wedge v=u$$

さて，相対補元の1意性を示すには，

$$x\wedge y=a, \qquad x\vee y=b$$

のとき $y=a\vee(x^c\wedge b)$ であることを示せばよい．そのために，

$$z=a\vee(x^c\wedge b)$$

と置こう．いま $y=b\wedge y$ に注意すれば，

$$z^c\wedge y=z^c\wedge b\wedge y=a^c\wedge(x\vee b^c)\wedge b\wedge y$$

であるが，$x\leqq b$ であるから前ページの（＊）に相当して

$$(x\vee b^c)\wedge b=x$$

ゆえに

$$z^c\wedge y=a^c\wedge x\wedge y=a^c\wedge a=0$$

また $y=a\vee y$ と $a\leqq x\vee b^c$ に注意して，

$$z^c\vee y=(a^c\wedge(x\vee b^c))\vee a\vee y=x\vee b^c\vee y$$
$$=b^c\vee x\vee b=b^c\vee b=1$$

結局

$$z^c\wedge y=0, \qquad z^c\vee y=1$$

すなわち $z=(y^c)^c=y$．これで $y=a\vee(x^c\wedge b)$ が証明された．

上の特徴づけを利用してベキ集合のラティスがブール代数であることを証明するのは，つまらないことであろう．集合算の分配律の証明は直接にするほうがはるかに簡単である．しかし次の注意はむだではあるまい．ベキ集合がラティスをなすこと，補集合が唯一の補元で $x^{cc}=x$ および de Morgan の法則が成り立つことは直ちに知られる．これらによ

ると，2つずつ組になって現われる交換律，吸収律，分配律の各恒等式は，その一方だけを証明すれば他方がそれから単なる変形で得られる．たとえば分配律として

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

を知ったとき，両辺の補集合を de Morgan の法則で変形して

$$x^c \vee (y^c \wedge z^c) = (x^c \vee y^c) \wedge (x^c \vee z^c)$$

を得る．これは恒等式であるから x，y，z に x^c，y^c，z^c にを代入しても成り立つが，代入した結果を $x^{cc}=x$ などによって簡単にすれば

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

ブール代数 L の元 x に補元 x^c を対応させれば，自己に双対なラティスとの同型対応が得られるから，最小上界と最大下界が入れ替わる．すなわち，ある部分集合 X の最小上界 $\sup X$ または最大下界 $\inf X$ があれば，

$$(\sup X)^c = \inf \{x^c \mid x \in X\} \quad \text{または} \quad (\inf X)^c = \sup \{x^c \mid x \in X\})$$

となって，$\{x \mid x^c \in X\}$ の最大下界または最小上界がある．上の式は特に完備ブール代数の恒等式として重要でり，ベキ集合の場合には **de Morgan の一般法則**として知られている．Algebra of logic に翻訳すれば，特称命題の否定を全称命題の形で（全称命題の否定を特称命題の形で）述べることに相当する．

ブール代数では，$x \leqq y$ ならば $x \wedge y^c = 0$ となること，また逆に $x \wedge y^c = 0$ ならば（$x = x \wedge (y \vee y^c) = x \wedge y$ により）$x \leqq y$ なることも，しばしば利用される．このことから，$\sup X$ が存在するとき任意の元 a に対して

$$a \wedge \sup X = \sup \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

なること，およびその双対が容易に証明される．これらを**弱完全分配律**という．

§22. 分配的なラティス，modular ラティスの特徴づけ

これは，理論の整理を目的とした書物でならば，むしろもっと前に述べるべき事項である．ラティスの最も端的な例は Hasse の図式で表わされるが，試みに5元から成るラティスの図式をあげつくしてみよう．

それがまた分配的なラティス，modular ラティスの特徴づけを与えるというのが本節の眼目である．図式は図5.1である．（2）と（3）は双

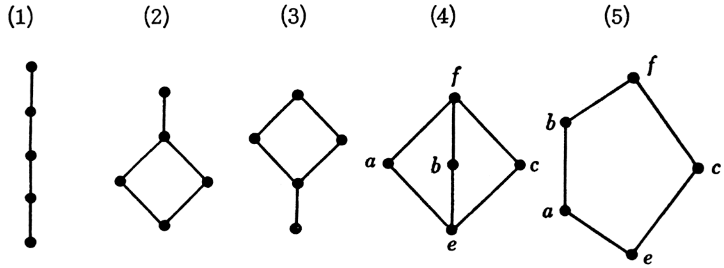


図 5.1

対同型なラティスである．（1）から（4）までは modular ラティス，（1）から（3）までは分配的なラティスであることは容易にわかる．（5）においては $a<b$ であるにもかかわらず

$$a\vee(c\wedge b)=a\vee e=a<b=f\wedge b=(a\vee c)\wedge b$$

であって，modular 律は成り立たない．したがって分配律も成り立たない．（4）では

$$a\vee(b\wedge c)=a\vee e=a<f=f\wedge f=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

で，ここでも分配律は成り立たない．

したがって，（4）または（5）のような部分ラティスを持つラティスは分配的でなく，また（5）のような部分ラティスを持つラティスは modular でない．これらのことの逆も成り立つことを証明しよう．

まず modular でない場合には，

$$x\leqq z \quad \text{かつ} \quad x\vee(y\wedge z)\neq(x\vee y)\wedge z$$

なる元 x, y, z が存在する．ここで，実は

$$x<z, \qquad x\vee(y\wedge z)<(x\vee y)\wedge z$$

となる（2番目の $<$ は modular 包含式による）．

そこで

$$e=y\wedge z, \quad f=x\vee y, \quad a=x\vee e, \quad b=z\wedge f$$

と置くと

$$e\leqq a<b\leqq f, \qquad e\leqq y\leqq f$$

であるから

$$e \leqq a \wedge y \leqq b \wedge y = f \wedge z \wedge y = f \wedge e = e$$

したがって

$$a \wedge y = b \wedge y = e \qquad \text{(i)}$$

双対に

$$a \vee y = b \vee y = f \qquad \text{(ii)}$$

ここで y が a か b と比較可能であると仮定すれば矛盾が生ずることを示そう．y が a か b と比較可能という場合はいろいろあるが，結局"$a \leqq y$ または $y \leqq b$"でつくされる．

ここで $a \leqq y$ と仮定すれば，(i) により $e=a$，また (ii) で $f=y$ となるから $b \leqq y$，したがってまた (i) により $e=b$ となって矛盾する．また双対に $y \leqq b$ からも矛盾が生ずる．ゆえに y と a，b は比較不能である．

そこで $c=y$ と置いて，足場にした x，y，z を取り払えば，図5.1の (5) を得る．

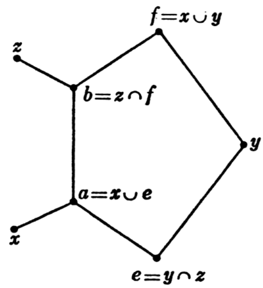


図 5.2

ゆえに modular でないラティスは (5) のような部分ラティスを持つ．分配的でないラティスは，もし modular でさえもないならば (5) のような部分ラティスを持つが，もし modular ならば，次に証明するように，(4) のような部分ラティスを持つ．いずれにしても相対補元は1意には定まらない．対偶をとっていえば，

相対補元が1意的なラティスは分配的なラティスである．

さて modular であって分配的でないラティスにおいては，ある元 x，y，z に対して

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \neq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

である．この式の左辺を e，右辺を f で表わせば，分配包含式により

$$e < f$$

また modular 律によって

$$(y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z),$$
$$(z \wedge x) \vee (y \wedge (z \vee x)) = ((z \wedge x) \vee y) \wedge (z \vee x),$$
$$(x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y)$$

この各式で表わされる元を順に a, b, c と名づけ，第１式と第２式によって $a\wedge b$ を計算しよう．まず $z\wedge x\leqq z$ と $y\wedge z\leqq z$ から

$$(z\wedge x)\vee y\leqq y\vee z,\quad (y\wedge z)\vee x\leqq z\vee x$$

を得て

$$\begin{aligned} a\wedge b &= ((y\wedge z)\vee x)\wedge(z\vee x)\wedge(y\vee z)\wedge((z\wedge x)\vee y)\\ &= ((y\wedge z)\vee x)\wedge((z\wedge x)\vee y). \end{aligned}$$

ところが $(y\wedge z)\vee x\geqq z\wedge x$ であるから，modular 律によって

$$\text{上式}=(((y\wedge z)\vee x)\wedge y)\vee(z\wedge x)$$

更に $y\wedge z\leqq y$ により

$$=(y\wedge z)\vee(x\wedge y)\vee(z\wedge x)$$

ゆえに

$$a\wedge b=e\,;$$

同様に

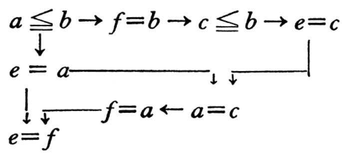
$$b\wedge c=e,\qquad c\wedge a=e.$$

また a, b, c の定義の式の左辺を使えば，双対に

$$a\vee b=b\vee c=c\vee a=f$$

を得る．

さて，もし $a\leqq b$ ならば下のようにして $e=f$ が得られ，$e<f$ に反する：



ゆえに，$a\leqq b$ は起こりえない．同様な理由で a, b, c のいずれの２つの間にも順序関係が成立しない．それゆえ５元 a, b, c, e, f の間に（４）のような関係がある．

くどいようであるが以上の特徴づけをまとめて再言する．**分配的なラティスの特徴**は，そのいかなる閉区間のいかなる元に対しても，相対補元は２つ以上（もちろん２つの場合も含めて）存在しないことである．**Modular ラティスの特徴**は，いかなる閉区間においても，同一の元の相異なる相対補元の間に順序関係が成立しないことである……これは前に述べたことの簡単な変形である．

§23. 広義ブール代数，広義ブール環

最小元0を有して相対可補的な分配的なラティスを広義**ブール代数**という．更に最大元をも有する場合がブール代数である．その任意の閉区間はブール代数であって，広義ブール代数の性質の多くはブール代数の性質から容易に導かれるのであるが，同じ形式の拡張を繰り返すよりは，最初から一般的に論じうるものは一般的に論じていくという，数学者のやり方の例をここで示してみよう．

本節の主題は，整数の算法に類似した算法を広義ブール代数に導入すことである．今後しばらく，1つの広義ブール代数が与えられたとして，その元について考えていく．

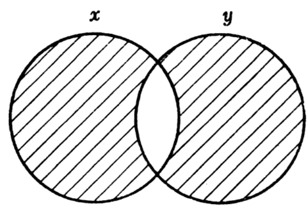


図 5.3

$x \cap y$ の $x \cup y/0$ に相対的な補元を $x+y$ で表わそう．ベキ集合で考えれば，x か y の一方だけに属するような物の全体，いわば2つの集合が相互にはみ出している部分であって，集合算では **symmetric difference** とよばれている（図5.3の斜線の部分）．

いま $x \leqq a$, $y \leqq a$ なる元 a を任意にとれば，x も y も閉区間 $[0, a]$ の元であり，この閉区間も1つのブール代数である．そこでの補元を x', y' などとしるせば，$x \cap y$ の $x/0$ に相対的な補元は，§21によって，$(0 \cup (x \cap y)') \cap x$ すなわち $(0 \cup x' \cup y') \cap x$ に等しく，したがって $x \cap y'$ に等しい．$x \cup y$ も $[0, a]$ に属するから，

$$\begin{aligned} x+y &= (x \cup y) \cap (x \cap y)' = (x \cup y) \cap (x' \cup y') \\ &= (x \cap x') \cup (x \cap y') \cup (y \cap x') \cup (y \cap y') \\ &= (x \cap y') \cup (y \cap x') \end{aligned}$$

$$x+y = (x \cup y) \cap (x \cap y)' = (x \cap y') \cup (y \cap x')$$

となって，図形的直観と合う．更に

$$(x+y)' = (x' \cap y') \cup (x \cap y) = (x' \cup y) \cap (y' \cup x)\,;$$

すなわち $(x+y)'$ は，図形についていえば，x にも y にも属さない点および双方に属する点の全体である．

Symmetric difference の名の示すように $x+y$ は x と y について対称，すなわち

交換律：
$$x+y=y+x$$
が成り立つ．また0は普通の0のように
$$x+0=0+x=0$$
を成立させる．次に

結合律：
$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
を証明しよう．

任意の元 x，y，z に対して，
$$x\leqq a,\qquad y\leqq a,\qquad z\leqq a$$
なる元 a，たとえば $x\vee y\vee z$ をとれば
$$\begin{aligned}(x+y)+z&=((x+y)\wedge z')\vee((x+y)'\wedge z)\\&=(((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z')\vee(((x'\wedge y')\vee(x\wedge y))\wedge z)\\&=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z).\end{aligned}$$
この最終辺で x，y，z をいかに入れ替えても同一の元が得られるから，結合律が成り立つ．

したがって，カッコをはずして $x+y+z$ などと書いてもよいであろう．一般に $x+y+\cdots\cdots+w$ のような式も，同様にカッコなしでも意味が確定する．それは，$x\wedge y\wedge\cdots\cdots\wedge w$ のような式の中で奇数個の文字以外には右肩に $'$ をつけたものを，あらゆるしかたで作り，それらのジョインをとったものになる．図形的にいえば，x，y，……，w の中の奇数個にだけ属する点の全体である．

次に，x と y を任意に与えたとき
$$x=y+z\tag{1}$$
なる元 z が存在して1意に定まる，ということが確かめられれば，数の演算との類似がいっそうよくなるであろう．それによって，前に述べた"加群"の条件がすべて満たされることになる．ところで，定義に従って $x+x$ を作ってみれば，やや奇妙な結果
$$x+x=0$$
が得られる：いかなる元も2倍すれば0になるのである．これを使うと，上で考えた z の存在と1意性が知られる．実際
$$z=x+y\tag{2}$$

と置けば（1）が成立し（存在），また逆に（1）から（2）が導かれる（1意）．この加群では，減法 $x-y$ は加法 $x+y$ と同じことになるのである．また，ある元 x の整数倍 nx を加法の繰返しで作ってみると

$$n \text{ が偶数ならば} \quad nx=0$$
$$n \text{ が奇数ならば} \quad nx=x$$

となる．

次に元 x，y の乗法 xy を $xy=x\wedge y$ で定義すれば，

交換律：　$$xy=yx$$

結合律：　$$(xy)z=x(yz)$$

および

$$0x=x0=0$$

が成立し，また

$$(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)'=(x\wedge z)\wedge(y'\vee z')$$
$$=(x\wedge z\wedge y')\vee(x\wedge z\wedge z')$$

と $x\wedge z\wedge z'=0$ から

$$(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)'=(x\wedge y')\wedge z$$

が得られ，同様に

$$(x\wedge z)'\wedge(y\wedge z)=(x'\wedge y)\wedge z$$

が得られて，

$$(xz)+(yz)=((x\wedge z)\wedge(y\wedge z)')\vee((x\wedge z)'\wedge(y\wedge z))$$
$$=((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z=(x+y)\wedge z$$

となり，

分配律：　$$(x+y)z=xz+yz$$

が成立する．

前に述べた定義によれば，広義ブール代数は上のように定められた加法，乗法に関して環をなし，特に乗法の交換律と

ベキ等律：　$$xx=x$$

が成り立つ環となる．

特にブール代数の場合には最大元1が“単位元”となる，すなわち次の恒等式が成り立つ．

$$x1=1x=x$$

一般に乗法の交換律の成立する環を，可換な環といい，更に乗法のベ

キ等律の行なわれるものを**広義ブール環**といい，更に上の恒等式の成立する“単位元”1 があるとき，これを**ブール環**という．

広義ブール代数 L から上のようにして作られた広義ブール環を，ラティス演算と順序は忘れることにして，$R(L)$ で表わそう．逆に広義ブール環 R が与えられたとき，これから一定の方法で広義ブール代数 $L(R)$ を作ることができる；それには次のようにする．

まず広義ブール環 R で $2x=x+x$ を考えると，ベキ等律によって

$$2x=(2x)(2x)=4xx=4x$$

となり，$2x$ を減じて

$$0=2x=x+x$$

を得る．したがって $x=y+z$ なる z は $z=x+y$ として与えられ，和と差が同じものになる．

$x=xy$ ということを $x\leqq y$ と書けば，この $\leqq$ は R における順序関係になる．なぜならば，

反 射 律：　$x\leqq x$

反対称律：　$x\leqq y$ かつ $y\leqq x$　ならば　$x=y$

推 移 律：　$x\leqq y$ かつ $y\leqq z$　ならば　$x\leqq z$

はそれぞれ

$$xx=x, \qquad xy=yx, \qquad (xy)z=x(yz)$$

から結論される．さて R の元 x, y に対して,

$$u=xy, \qquad v=x+y+xy$$

はそれぞれ $\{x, y\}$ の最大下界，最小上界であることを証明しよう．

$u\leqq x$, $u\leqq y$ は明白である．また $z\leqq x$ かつ $z\leqq y$ とすれば

$$z=zy=(zx)y=z(xy)=zu$$

により $z\leqq u$ となる．ゆえに u は $\{x, y\}$ の最大下界である．次に

$$xv=xx+xy+xxy=x+xy+xy=x+0=x$$

により $x\leqq v$；同様に $y\leqq v$ を得る．また $x\leqq z$ かつ $y\leqq z$ とすれば

$$vz=xz+yz+xyz=x+y+xy=v$$

により $v\leqq z$ となる．ゆえに v は $\{x, y\}$ の最小上界である．

したがって R はラティスをなし，

$$x\wedge y=xy, \qquad x\vee y=x+y+xy$$

次に

$$x \wedge (y \vee z) = x(y+z+yz) = xy+xz+xyz = xy+xz+xxyz$$
$$= xy+xz+xyxz = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

により，R は分配的である．R の零元0とすべての元に対して明らかに $0 \leqq x$ が成立し，0は最小元である．次に任意の閉区間 $[y, x]$ の任意の元 z に対して $u = x+y+z$ とおけば，$y \leqq z \leqq x$ によって

$$u \wedge z = xz+yz+zz = z+y+z = y,$$
$$u \vee z = x+y+z+z+(u \wedge z) = x+y+y = x$$

となるから，u は z の x/y に相対的な補元となる．

以上で R は広義ブール代数となることがわかった．この広義ブール代数を，環の演算は忘れることにして，$L(R)$ で表わそう．次の事項は容易に確かめられる：

R がブール環ならば $L(R)$ はブール代数である；
R から $L(R)$，L から $R(L)$ を作る操作は互いに逆である，すなわち　$L(R(L)) = L$,　$R(L(R)) = R$．

そこで，今後は，特に区別する必要がなければ，このようにして対応する広義ブール代数と広義ブール環を同じものとみなすことにする．したがってブール代数とブール環も同一視されることになる．

§24. 広義ブール代数の ideal

広義ブール代数 L の ideal の1つを J としよう．ラティスの ideal の定義により，

1)　$x, y \in J$ ならば $x \vee y \in J$

2)　$x \leqq y \in J$ ならば $x \in J$

である．これから直ちに，$R(L)$ の演算について

3)　$x, y \in J$ ならば $x+y \in J$

4)　$x \in L$, $y \in J$ ならば $xy \in J$

であることが知られる．逆に J が 3), 4) の性質を持てば，4) から 2) が導かれ，また $x, y \in J$ に対して $x+y \in J$, $xy \in J$, したがって $x+y+xy \in J$ となり，1) も成立する．性質 3), 4) が環 $R(L)$ の ideal の判定条件であることは，広義ブール環では和と差が同一であることから知られる．ゆえに広義ブール代数においては，ラティスとし

ての ideal と，環としての ideal とが同じものである．

閉区間 $[0,\ a]$ もラティス L の1つの ideal，“単項 ideal” であるが，これは環の ideal としても単項 ideal である：

$$[0,\ a]=\{x\,|\,x\leqq a\}=\{a\wedge x\,|\,x\in L\}=\{ax\,|\,x\in L\}.$$

さて ideal J が与えられたとき，$x+y\in J$ なる条件を，L の元 x と y との関係と考えて，$x\equiv y\ (\mathrm{mod}\,J)$ で表わそう．mod J は modulo J と読む．あるいは，J を法として x と y とが**合同** (congruent) であるという．紛れないときは単に $x\equiv y$ と書く．この関係が1つの同値関係であること，すなわち

$$x\equiv x,$$

$$x\equiv y \quad ならば \quad y\equiv x,$$

$$x\equiv y,\ y\equiv z \quad ならば \quad x\equiv z$$

という法則が行なわれることは直ちに知られる．

更に

α) $$x\equiv y \quad かつ \quad u\equiv v$$

であるときには，

$$ux+uy=u(x+y)\in J$$

によって $ux\equiv uy$；同様に $uy\equiv vy$．ゆえに，α) ならば

β) $$ux\equiv vy\,.$$

また，容易に知られるように，α) ならば

γ) $$x+u\equiv y+v\,;$$

そして α) → β) と α) → γ) を重ねて用いれば，α) →

δ) $$x+u+xu\equiv y+v+yv\,;$$

ラティスの記号では β)，δ) が

ε) $$x\wedge u\equiv y\wedge v, \qquad x\vee u\equiv y\vee v$$

となる．

したがって，この同値関係 $\equiv$ によってラティス L の類別を作れば，それは L に準同型なラティスをなす．これを，J を法とする L の**剰余ラティス**といおう．元 x を含む類 $C(x)$ を x に対応させる写像を，**“自然な” 準同型** (natural homomorphism) という．$C(0)$ は剰余ラティスの最小元であるが，L の部分集合としては J と一致する．

一般に，あるラティス L からあるラティス L' の上への準同型写像

$x \to x'$ が与えられたとする．もし L が最小元 0 を持てば $0'$ は L' の最小元であること，この場合に

$$J=\{x \mid x'=0'\}$$

が L の1つの ideal であることは明白であろう．もし L が分配的ならば L' も分配的であることは前に述べた．また L のいかなる閉区間も可補的ならば，すなわち L が相対可補的ならば，次に証明するように L' もまた相対可補的である．

L' において $e \leqq g \leqq f$ であるとし，g の f/e に相対的な補元の存在を証明しよう．$x \to x'$ は L から L' の上への写像であるから，L' の元 e, f, g は L のある元 a, b, c によって

$$a'=e, \qquad b'=f, \qquad c'=g$$

と表わされる．この a, b, c に対し

$$x=a, \qquad y=a \cup b \cup c, \qquad z=a \cup c$$

と置けば，$e \leqq g \leqq f$ により

$$x'=e, \qquad y'=f, \qquad z'=g, \qquad x \leqq z \leqq y$$

L は相対可補的であるから，z の y/x に相対的な補元 u がある．これに対応する u' は，明らかに，g の f/e に相対的な補元である．

したがって，特に広義ブール代数 L に準同型なラティス L' は広義ブール代数であり，その準同型写像 $x \to x'$ については恒等式

$$(x+y)'=x'+y', \qquad (xy)'=x'y'$$

が成り立つ．また $0'$ は広義ブール環 L' の零元であり，2つの条件

$$x'=y', \qquad x'+y'=0'$$

は互いに同等である（y' を両辺に加えると，一方から他方に移る）．2番目の条件の左辺を $(x+y)'$ と書いてみると，その条件は L の ideal

$$J=\{z \mid z'=0\}$$

を法としての合同 $x \equiv y$ にほかならない．J を法として L の剰余ラティスを考え，自然な準同型を $x \to C(x)$ とすれば，結局，2条件

$$x'=y', \qquad C(x)=C(y)$$

が同等になる．ゆえに L' の元と剰余ラティスの元は $x' \longleftrightarrow C(x)$ により1対1に対応し，これは明らかにラティスの同型対応である．

すなわち，広義ブール代数 L に準同型なラティス（広義ブール代数）の一般型は，L の ideal を法とする L の剰余ラティスによって与えら

れる．特に L がブール代数ならば，これに準同型なラティスはまたブール代数である（$1'$ が最大元）．

また広義ブール代数の ideal J は，J を法とする類別の1つの類 C を与えれば，

$$J=\{x+y \mid x\in C,\quad y\in C\}$$

として定まる．証明は容易であるから省略する．

ラティス L から L' への準同型 $x\to x'$ と，L' から L'' への準同型 $x'\to x''$ があれば，x に x'' を直接対応させて L から L'' への準同型が得られる．広義ブール代数の場合に，ideal

$$J_1=\{x \mid x'=0'\},\quad J_2=\{x \mid x''=0''\}$$

を考えれば，$J_1\subseteqq J_2$ となる．逆に，J_1 も J_2 も広義ブール代数 L の ideal であって，$J_1\subseteqq J_2$ であるときには，J_1 を法としての類別 L_1 は J_2 を法としての類別 L_2 よりも“精細”である，すなわち

$$x\equiv y(\mathrm{mod}\ J_1)\quad ならば\quad x\equiv y(\mathrm{mod}\ J_2)$$

このとき，ラティスとしては，L_2 が L_1 に準同型になる．

特に単項 ideal $[0,\ a]$ を法としての合同 $x\equiv y$ (mod $[0,\ a]$) を

$$x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ a)$$

とも書き表わす．これは順次に

$$x+y\leqq a,\qquad x+y=a(x+y),\qquad x+ax=y+ay$$

と変形され，上記 $x\equiv y$ を含めた4通りの関係式が互いに同等である．最後の等式にある $x+ax$ は $a\frown x$ の $x/0$ に相対的な補元であって，図形的には x が a からはみ出した部分である．$x\equiv y$ (mod a) は，a とのミートを無視すれば x と y とが一致するということである．

この所論からわかるように，集合

$$L'=\{u \mid u\in L,\ u\frown a=0\}$$

の元 u は，$J=[0,\ a]$ による L の剰余ラティスの元 $C(u)$ と1対1に対応し，L' は L の部分ラティス，しかも広義ブール代数であって，上の対応は同型対応である．

特にブール代数では

$$L'=[0,\ a^c]\qquad (a^c\ は\ L\ における\ a\ の補元)$$

である．この場合，L から剰余ラティスを経て L' に移る準同型写像が，直接には $x\to a^c\frown x$ と表わされる．

最後に例をあげる.

1つの無限集合 A をとり, A の有限部分集合の全体を集合算とともに考えれば, これは最大元を持たない広義ブール代数となる. これを L とし, A の1つの無限部分集合 B をとって, B の部分集合であるような L の元の全体を J とすれば, J は単項でない ideal をなす. 対応する剰余ラティスは, "L の元を, B の元を無視して考えたもの" といってよいであろう.

測度論の知識があれば, 可測集合で測度有限な集合の全体が広義ブール代数をなすこと, そのような集合で測度0の集合を無視するのは測度0の集合の作る ideal を法として剰余ラティスを考えるのに相当することが, 容易にわかるであろう.

位相空間論, あるいは点集合論に例を求めれば, 開集合の全体が生成する有限加法族で, **疎** (non-dense) な集合の作る ideal を法とする剰余ラティスの各類は1つ, そしてただ1つの正則開集合で代表される. 疎な集合を無視することは, 紙面に描いた図形の縁のところを問題にしないことに相当する.

ベキ集合と限らず, 考えうるあらゆる集合の全体が広義ブール代数をなすともいえよう. しかし, それにはラティスの概念を集合の概念から解放せねばならない.

§25. 広義ブール代数の表現論

われわれは, いままでラティスの例として集合を元とするものを主にあげてきた. これは, いかなる順序集合も集合の包含関係によって表わされるためでもあるが, 一方, 今日の数学上の諸概念が多く集合概念で規定されているためでもある. しかし広義ブール代数, 更に一般に分配的なラティスについては事情はもっと深刻である. それを明らかにするのが, 次の表現定理である:

表現定理: 任意の分配的なラティス L に対して適当な集合 E をとれば, ベキ集合 2^E の (集合算をラティス演算として) ある部分ラティスと L とが同型である.

かような同型対応を L の**表現** (representation) という. E を L の**表現空間**という. 表現集合といわないのは, 後に述べるように E にご

く自然な位相の概念を導入して，E をいわゆる位相空間とすることができるからである．特に広義ブール代数の場合には

相対補元は表現において補集合に対応する

のであるが，このことの正確な意味は後に知られる．

余談にわたるが，ブール代数の表現論は図形的直観からも暗示される．紙面に描きうる図形の作るブール代数を表現するのに，まず考えられるのは，紙上の点の集合を用いることであろう．図形のほうをもとにすれば，紙上の1点は，多くの図形に共通なものとして指定される．図形が多くないと，共通な点が1点だけにはならない．そこで，互いに交わる図形をなるべく多くとって図形の集合 M を作れば，この M に1点が対応しそうに思われる．してみると，そのような集合 M を点の代わりに用いても表現の理論ができそうである．

上記の"互いに交わる"ということを精密にして"有限交差性"を定義し，"なるべく多くとって"というところに Zorn の lemma を用いることになる．この考えは後に"極大双対 ideal"と結びつけられる．任意のラティス L において，空集合と L 自身は ideal であるが，これを **trivial** な **ideal** といい，trivial でない ideal のうちで極大なもの（順序 $\subseteqq$ についての極大）を **極大 ideal** という．同様に空集合と L を **trivial な双対 ideal** ともいい，trivial でない双対 ideal のうちで極大なものを **極大双対 ideal** という．

一般ブール代数 B を固定しておき，B の空でない部分集合が次の性質 1) を持つとき，K は**有限交差性**を持つという：

1) K の任意有限個の元 x_1，……，x_n に対して

$$x_1 \frown \cdots\cdots \frown x_n > 0.$$

有限交差性を持つ部分集合の全体を F とする．

F は finite character を持つ，すなわち

K が有限交差性を持つためには，K のいかなる有限部分集合も有限交差性を持つことが必要かつ十分である．

したがって，Zorn の lemma によって，F の任意の元 K に対し，F の極大元であって K を含むものが存在する．

F の極大元の全体を E とする．すなわち，次の条件 2)，3) を満たす集合 M（B の部分集合）の全体が E である．

2) M は有限交差性を持つ.

3) K が有限交差性を持ち $K \supseteqq M$ であれば $K=M$.

ここで, M の元 x, y のミート $x \wedge y$ を M に付け加えても有限交差性は保たれ (すなわち M に元 $x \wedge y$ を付け加えた集合も有限交差性をもち), また $x \in M$ かつ $x \leqq z$ のとき z を M に付け加えても有限交差性は保たれる. 条件 3) によれば, この $x \wedge y$ も z も M の元になっているはずである. ゆえに

4) $x \in M$ かつ $y \in M$ ならば $x \wedge y \in M$,

5) $x \in M$ かつ $x \leqq z$ ならば $z \in M$.

これは M が双対 ideal, すなわち B の双対ラティスの ideal であることを示している. また M の有限交差性によって

6) $0 \notin M$, したがって $M \neq B$

逆に, M が L の双対 ideal で $0 \notin M$ であるとすれば, M は有限交差性を持つ ; なぜならば, M の任意有限個の元 x_1, ……, x_n に対して

$$x_1 \wedge \cdots\cdots \wedge x_n \in M \quad \text{したがって} \quad x_1 \wedge \cdots\cdots \wedge x_n \neq 0$$

となるからである. なお, M を単に双対 ideal とすると, 5) によって, $0 \in M$ ならば $M=B$, したがって, $0 \notin M$ と $M \neq B$ は同等な条件になる.

ゆえに E の元は B の極大双対 ideal である. 逆も成り立つことは容易に知られるから, 結局,

E は B の極大双対 ideal の全体である.

極大双対 ideal M を1つ定めておいて, B の双対ラティスの, ideal Mを法とする剰余ラティスを考える……これを表現論の出発点としてもよいが, 少し違う道をたどろう. よく見れば同じ考えなのである.

B の元 x に対して, 集合 $E(x)$ を次のように定義する.

$$E(x)=\{M | x \in M \in E\}$$

とおく. すなわち, $E(x)$ は E の部分集合であり, E の元 M については

$M \in E(x)$ と $x \in M$ が同等である

とする. この対応 $x \to E(x)$ は B の表現になっていることを, 以下順次に証明しよう.

まず 5) によって

5)′　　　　$x \leqq z$　ならば　$E(x) \subseteqq E(z)$

である．したがって

7)　　$E(x \wedge y) \subseteqq E(x) \wedge E(y)$,　　$E(x) \vee E(y) \subseteqq E(x \vee y)$

ただし $E(x) \wedge E(y)$, $E(x) \vee E(y)$ は集合算である．

B の 元 x と E の元 M との間に，

$$M \text{ のすべての元 } u \text{ に対して } x \wedge u > 0$$

という関係があるときは，M に x を付け加えて得た集合を K とすれば，K も明らかに有限交差性を持ち，しかも $M \subseteqq K$ であるから，$K=M$ であり，したがって $x \in M$ となる．

対偶に移って，$x \notin M$ とすれば

$$M \text{ の ある元 } u \text{ に対して }\quad x \wedge u = 0$$

ということになる．

そこで，$x \notin M$　かつ　$y \notin M$ のとき，

$$x \wedge u = y \wedge v = 0, \qquad u \in M, \qquad v \in M$$

なる u, v をとって $w = u \wedge v$ と置けば，

$$w \in M, \qquad (x \vee y) \wedge w = (x \wedge w) \vee (y \wedge w) = 0$$

となるから，4) によって $x \vee y \notin M$ が結論される．対偶に移ると

$$E(x \vee y) \subseteqq E(x) \vee E(y).$$

また，4) から $E(x) \wedge E(y) \subseteqq E(x \wedge y)$ を得る．7) と比較して

$$E(x \vee y) = E(x) \vee E(y), \qquad E(x \wedge y) = E(x) \wedge E(y).$$

すなわち，$x \rightarrow E(x)$ は B から 2^E の ある部分ラティス B' の上への準同型写像である．

$E(0)$ は定義によって空集合 $\emptyset$ になり，これが B' の最小元になる．また，$x > 0$ とすれば，$K = \{x\}$ は有限交差性を持つから，F の極大元であって K を含むものがある；すなわち，$x \in M \in E$ なる M がある．対偶に移っていうと，B の ideal

$$J = \{x \mid E(x) = \emptyset\}$$

の元は 0 だけである．前節のように J を法として B の剰余ラティスを作れば，それは B' と同型であるが，このとき，$x \equiv y \pmod{J}$ ならば $x + y = 0$，すなわち

$$E(x) = E(y) \quad \text{ならば} \quad x = y.$$

ゆえに $x \to E(x)$ は1対1の対応，したがって同型対応である．

特に B がブール代数である場合を考える．任意の極大双対 ideal M に対して，M の元 x をとれば $x \leqq 1$ であるから $1 \in M$．したがって $E(1)=E$ である．そして

$$E(x^c) \wedge E(x)=\emptyset, \qquad E(x^c) \vee E(x)=E$$

により，$E(x^c)$ は E に関する $E(x)$ の補集合 $E-E(x)$ となる．

同様に，広義ブール代数の場合にも y の $x/0$ に相対的な補元を z とすれば，$E(z)$ は $E(x)$ に関する $E(y)$ の補集合 $E(x)-E(y)$ であることが知られる．z を $x-y$ と書けば

$$E(x-y)=E(x)-E(y).$$

§26. 分配的なラティスの表現論

一般の分配的なラティスの表現を極大双対 ideal の概念では律し切れないことは，たとえば図5.4の例でも知られる．その例では極大双対 ideal がただ1つしかない．したがって 2^E はただ2つの元から成るので，5元から成るラティスを表現すべくもない．

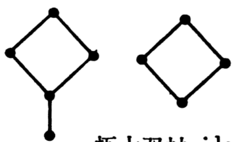


図 5.4

前節の所論を再検討してみよう．まず，部分集合の **有限交差性** は，一般のラティスにおいても，最小元 0 がありさえすれば，以前と同様に定義することができる．これについて，Zorn の lemma が以前と同様に適用されるし，極大双対 ideal との関係も以前と同様である．ゆえに，集合 K が有限交差性を持てば，K を含む極大双対 ideal が存在する．

また，導き出すのに手間がかかったものとしては，恒等式

$$E(x \vee y)=E(x) \vee E(y)$$

がある．この恒等式の主要な根拠は，

1)　　$x \vee y \in M$　　ならば　　$x \in M$ または $y \in M$

ということであった．前節の所論をたどってみると，一般に，

　最小元がある分配的なラティスにおいて，極大双対 ideal M については 1) が成り立つ

ことがわかる．そのようなラティスにおいて，極大双対 ideal でない双

対 ideal M について 1) が成り立つ場合があることは，図 5.4 からも発見される．そこで，M の性質 1) を抽象して，この性質がある双対 ideal の全体を考えば，以前よりも多くの双対 ideal を用いて同様な理論を進めることができそうに思われる．

一般のラティスにおいて，trivial でない ideal M に対して

1)′ $x \wedge y \in M$ ならば $x \in M$ または $y \in M$

であるとき，M を **素 (prime) な ideal** または **素 ideal** という．また trivial でない双対 ideal M に対して 1) が成り立つとき，M を **素な双対 ideal** または (上記の双対とみて) **双対素 ideal** という．余談ながら，これらの用語は環の素 ideal から借用して作られたものである．

最小元がある分配的なラティスにおいては，上に述べたように，極大双対 ideal は双対素 ideal である．実は，これも余談であるが，任意の分配的なラティスにおいても，極大双対 ideal は双対素 ideal であり，極大 ideal は素 ideal である．証明の方針としては，極大双対 ideal M について $x \vee y \in M$ と $x \notin M$ を仮定し，双対 ideal $\{u | x \vee u \in M\}$ と x，M の関係を調べることによって，$y \in M$ を結論すればよい．

分配的なラティス L において，$a < b$ のとき，L の部分ラティス

$$A = \{x | a \leqq x \in L\}$$

において a は最小元であり，$\{b\}$ は A における有限交差性をもつ部分集合であるから，A においては $\{b\}$ を含む極大双対 ideal M があり，

$$a \notin M, \qquad b \in M.$$

また A は分配的であるから，M は A の双対素 ideal である．ここで

$$P = \{x | a \vee x \in M,\ x \in L\}$$

と置けば，再び $a \notin P$，$b \in P$ で，P が L の trivial でない双対 ideal であることは直ちに知られる．$x \vee y \in P$ ならば

$$(a \vee x) \vee (a \vee y) = a \vee (x \vee y) \in M, \quad a \vee x \in A, \quad a \vee y \in A$$

であるから，$a \vee x \in M$ または $a \vee y \in M$，すなわち $x \in P$ または $y \in P$ となる．ゆえに P は L の双対素 ideal である．

以上で準備はできた．今度は分配的なラティス L における双対素 ideal の全体を E として，前と同様に

$$E(x)=\{M|x\in M\in E\}$$

とおく．双対 ideal の定義から次の第1式が得られ，素であるという条件も使えば第2式が得られる：

$$E(x\wedge y)=E(x)\wedge E(y),\qquad E(x\vee y)=E(x)\vee E(y).$$

また，すぐ前に述べたように，$a<b$ のときには $a\notin P$，$b\in P$ なる双対素 ideal P が存在するから，$E(a)\neq E(b)$ となる．いま $x\neq y$ とすれば，$x\wedge y<x\vee y$ となるから，$E(x\wedge y)\neq E(x\vee y)$ すなわち

$$E(x)\wedge E(y)\neq E(x)\vee E(y)$$

これは，$E(x)=E(y)$ の場合には起こりえない．ゆえに

$$E(x)=E(y)\quad ならば\quad x=y$$

すなわち 対応 $x\to E(x)$ は1対1，したがって同型対応である．

これを広義ブール代数の場合と結びつけるには，広義ブール代数Bでは極大双対 ideal と双対素 ideal とが一致することを証明すればよい．それには，B の双対素 ideal は極大双対 ideal であることを示せば十分である．M を双対素 ideal，J を trivial でない双対 ideal とし，$M\subseteqq J$ を仮定して $J\subseteqq M$ を導き出せばよい．$x\in J$ として，$x\in M$ となることを示そう．双対素 ideal は空集合でないから，M には元がある．$a\in M$ として，$a\wedge x$ の $a/0$ に相対的な補元を z とすれば

$$z\wedge x=(z\wedge a)\wedge x=z\wedge(a\wedge x)=0,\qquad z\vee(a\wedge x)=a\in M$$

M は双対素 ideal であるから，$z\in M$ または $a\wedge x\in M$ となる．ここで $z\in M$ と仮定すれば，最初の仮定 $M\subseteqq J$ により $z\in J$，したがって $z\wedge x\in J$ すなわち $0\in J$ となるから，J は B に一致して trivial な双対 ideal になり，最初の仮定に反する．ゆえに $a\wedge x\in M$ のほうが成り立ち，$a\wedge x\leqq x$ により $x\in M$ となる．

さて表現定理によれば，任意の分配的なラティス L は ある ベキ集合 2^E の ある部分ラティスと同型である．同型なラティスを同一のものとみなせば，L は あるブール代数の部分ラティスである．したがって，また特に広義ブール代数は あるブール代数の部分ラティスである．

§27. 表現と位相空間

ある集合 E のすべての部分集合 X に，X によって1意に確定する E の部分集合 X^a を，次の諸条件を満たすように対応させたとする：

1)　$X \subseteqq X^a$,　　　2)　$(X^a)^a = X^a$,

3)　$(X \cup Y)^a = X^a \cup Y^a$,　　　4)　$\emptyset^a = \emptyset$.

たとえば，平面上の点の全体を E とし，74ページで述べた閉包 $\overline{X}$ を X^a とすると，上の条件は満たされる（証明は省略する）．一般に，上の条件を満たす対応 $X \to X^a$ を**閉包演算**（closure operation），X^a を X の**閉包**（closure ;abgeschlossene Hülle），集合 E と閉包演算との組を**位相空間**（topological space）という．位相空間は単なる集合とは概念上異なるが，混乱のおそれがないときは，便宜上，集合を表わす記号 E で位相空間をも表わす．このように閉包演算を定めて位相空間を作ることを，集合 E を **位相づける**（topologize）という．

E に関する X の補集合 E-X を X^c で表わすことにして

$$X^i = ((X^c)^a)^c$$

によって演算 $X \to X^i$ を定義し，X^i を X の**内部**（interior）という．

上のような演算の繰返しにおいては，しばしばカッコを省いて $(X^c)^a$ を X^{ca} としるしたり，$((X^c)^a)^c$ を X^{cac} としるすことがある．このように演算記号を並べたとき，定義によって，2つ連続した c は省くことができる：たとえば

$$X^{caccac} = X^{caac}$$

また閉包演算の性質 2）によって，2つ連続した a はその1つを省くことができる：たとえば

$$X^{caac} = X^{cac}$$

閉包演算の性質 1)〜4) に応じて

1)′　$X \supseteqq X^i$,　　　2)′　$(X^i)^i = X^i$,

3)′　$(X \cap Y)^i = X^i \cap Y^i$,　　　4)′　$E^i = E$

が成り立つことは，単純な計算で知られる．逆に，E のすべての部分集合に対して規定された演算 $X \to X^i$ が上の性質を持つとき，

$$X^a = X^{cic}$$

と置けば $X \to X^a$ は1つの閉包演算である．

特に，広義ブール代数 B を固定して考え，表現

$$B \ni x \to E(x) \subseteqq E$$

を使って，Bの極大双対 ideal 全体のなす集合 E を位相づけよう．それがいわゆる **Wallman-Stone 式位相づけ**である．

$X \subseteqq E$, $P \in E$ とする．$P \in E(x) \subseteqq X$ なる元 x が存在するとき，P を X の内点といい，X の内点全体のなす集合を X^{i} で表わす．こうして定義された演算 $X \to X^{\mathrm{i}}$ が 1)′，2)′，4)′ を満たすことはほとんど明らかであろう． 実は次に示すように 3)′ も満たされるので， $X^{\mathrm{a}} = X^{\mathrm{cic}}$ と置くことによって E が位相づけられる．

まず定義によって，

$$X \subseteqq Y \quad \text{ならば} \quad X^{\mathrm{i}} \subseteqq Y^{\mathrm{i}}$$

は明白，したがって任意の X, Y に対し

$$(X \frown Y)^{\mathrm{i}} \subseteqq X^{\mathrm{i}}, \qquad (X \frown Y)^{\mathrm{i}} \subseteqq Y^{\mathrm{i}}$$

$$(X \frown Y)^{\mathrm{i}} \subseteqq X^{\mathrm{i}} \frown Y^{\mathrm{i}}$$

となる．この包含関係を逆向きにできれば 3)′ が得られる．

P が X および Y の内点であるとすれば，

$$P \in E(x) \subseteqq X, \qquad P \in E(y) \subseteqq Y$$

なる x, y が存在する．これに対して $z = x \frown y$ と置けば

$$P \in E(z) \subseteqq X \frown Y$$

となり，P は $X \frown Y$ の内点である．ゆえに

$$X^{\mathrm{i}} \frown Y^{\mathrm{i}} \subseteqq (X \frown Y)^{\mathrm{i}}$$

こうして得られた“表現空間” E は幾つかの著しい性質を持つ．たとえば E の相異なる 2 元 P, Q に対しては，

$$P \in X^{\mathrm{i}}, \qquad Q \in Y^{\mathrm{i}}, \qquad X \frown Y = \emptyset$$

なる X, Y が存在する――E がいわゆる **Hausdorff 空間**である――ことが次のように示される．$P \neq Q$ であるから，P と Q の一方に属し，他方に属さない E の元 u がある．たとえば $u \in P$ としよう．$u \notin Q$ であるが，Q は B の極大双対 ideal であるから，表現論で述べたように，$u \frown v = 0$ なる Q の元 v がある．これらの関係を表現に移せば，

$$P \in E(u), \qquad Q \in E(v), \qquad E(u) \frown E(v) = \emptyset.$$

そこで $X = E(u)$, $Y = E(v)$ とすればよい．$u \in Q$ でも同様である．

位相空間 E の部分集合 A が次の性質を持つとき，A をコンパクトであるという：

$A \subseteqq \bigcup \{X^{\mathrm{i}} | X \in F\}$ かつ $F \subseteqq 2^E$ なる F に対しては，F の有限部分集合 F_0 で $A \subseteqq \bigcup \{X^{\mathrm{i}} | X \in F_0\}$ なるものがある．

また位相空間 E が次の性質を持つとき，E は**局所コンパクト**であるといわれる：

E のいかなる点 P に対しても，$P \in A^i$ なるコンパクトな集合 A が存在する．

表現空間 E が局所コンパクトであることを示そう．実は定義から知られるように，B の任意の元 a に対して $(E(a))^i = E(a)$ であるから，$E(a)$ がコンパクトであることを示せばよい．以下しばらく B の元 a および 2^E の部分集合 F を固定して考える．

F のいかなる有限部分集合 F_0 に対しても，$E(a) \subseteqq \bigcup \{X^i | X \in F_0\}$ とはならないと仮定して，$E(a) \subseteqq \bigcup \{X^i | X \in F\}$ とならないことを示せば十分である(対偶)．$E(x) \subseteqq X \in F$ なる X が存在するような x で $x \leqq a$ なるものの全体を C，そのような x の $a/0$ における補元 $a-x$ の全体を C' とする．仮定によって，C のいかなる有限個の元 x_1，……，x_n をとっても，

$$a \neq x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$$

となるから，

$$0 \neq (a-x_1) \cap \cdots\cdots \cap (a-x_n)$$

したがって C' は有限交差性を持つ．$0 \in C$ であるから $a \in C'$ である．それゆえ，$C' \subseteqq M$ なる B の極大双対 ideal M が存在し，特に $a \in M$ である．C のいかなる元 x をとっても，$a-x \in M$ であるから，$x \notin M$ となる．さて

$$P \in E(a), \quad P \in \bigcup \{X^i | X \in F\}$$

とすれば，$P \in X^i$ なる $X(\in F)$ があり，したがって更に

$$P \in E(u) \subseteqq X$$

なる u があるが，$x = a \cap u$ と置けば

$$P \in E(x) \subseteqq X, \quad x \leqq a$$

となり

$$x \in P, \qquad x \in C.$$

ところが $x \in C$ によって $a-x \in M$，したがって $x \notin M$ となる．ゆえに，上のような P は決して M と一致しない．ところが $a \in M$ であるから $M \in E(a)$．ゆえに $M \notin \bigcup \{X^i | X \in F\}$．かような M が存在するから，$E(a) \subseteqq \bigcup \{X^i | X \in F\}$ とはならない．(証明終)

一般に位相空間 E において $G \subseteqq 2^E$, かつ任意の $X(\subseteqq E)$ に対して $X^i = \bigcup \{V | G \ni V \subseteqq X\}$ なるとき，G を E の**開集合の基** (base) という．表現空間では $\{E(x) | x \in B\}$ が開集合の基である．開集合の基に属する集合は $X = X^i$ なる性質を持つ．一般に $X = X^i$ なる X を**開集合**という．同様に一般に $X = X^a$ なる集合 X を**閉集合**という．証明は省くが，コンパクトな集合は必ず閉集合である．開集合の基を適当にとって，その元がすべて閉集合でもあるようにできる Hausdorff 空間を**完全不連結** (totally disconnected) な位相空間という．

表現空間は局所コンパクトで完全不連結な空間である．逆に局所コンパクトで完全不連結な位相空間 E_0 が与えられたとき，E_0 のコンパクトな開集合の全体を B とすれば，証明は省くが B は E_0 の開集合の基となり，集合算に関して広義ブール代数をなす．E_0 の任意の元 p に対して $\{X | p \in X \in B\}$ は B の極大双対 ideal となり，逆に B の任意の極大双対 ideal P はこの形で表わされる．そして対応 $p \to P$ は1対1であり，この対応によって E_0 と B の表現空間とが閉包演算に関して同様の構造を持つこと，いわゆる**位相同型**であることが知られる．

証明を省きすぎたから，"表現空間におけるコンパクトな開集合 X に対しては，$X = E(x)$ なる x がある" ことを証明しよう．まず，

$$C = \{y | E(y) \subseteqq X\}$$

と置けば，$X^i = X$ により，

$$X \subseteqq \bigcup \{E(y) | y \in C\}.$$

これと，X がコンパクトであること，および $(E(y))^i = E(y)$ から，

$$X \subseteqq \bigcup \{E(y) | y \in C_0\}$$

なる C の有限部分集合 C_0 の存在が導かれる．この C_0 が空集合ならば $X = \emptyset = E(0)$ であり，空でなければ

$$C_0 = \{x_1, \cdots\cdots, x_n\} \qquad x = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$$

と置くとき，$X \subseteqq E(x)$．一方 $E(x) \subseteqq X$ も直ちに知られるから，

$$X = E(x).$$

広義ブール代数 B が特にブール代数ならば，表現空間そのものがコンパクトである．

位相空間 E において

$$X^a = \bigcap \{V | F \ni V \supseteqq X\}$$

がすべての部分集合 X に対して成り立つとき，$F(\subseteqq 2^E)$ を E の**閉集合の基**という．一般の分配的なラティス L の表現 $L \ni x \to E(x)$ に対して，$\{E(x) \mid x \in L\}$ を基とするように E を位相づけることもできる．その証明は上の方法と双対に行なえばだいたいよろしい．L がブール代数ならば，この位相づけは前に述べたものと一致する．

§28.　広義ブール代数の切断

B を広義ブール代数，L を B の ideal 全体のなすラティス（その順序は $\subseteqq$）とする．$M \subseteqq B$ のとき，M の上界全体の集合を M^*，下界全体の集合を M_* とし，

$$S = \{M \mid (M^*)_* = M\}$$

とすれば，S は L の部分集合であって，L における順序に関しては B の切断のラティスと順序同型である．そこで S を B の切断のラティスと考え，その元を B の切断と考えよう．S は L の部分ラティスではないかもしれない．すなわち，L におけるラティス演算を S の元に施しても必ずしも S の元は得られない．ただミートをとる演算は S においても L においても同一で，S の元や L の元を集合と考えたときの共通部分をとることになる．L の任意の部分集合 M に対して，

$$(((M^*)_*)^*)_* = (M^*)_*$$

であって，これは1つの ideal になるから，$(M^*)_*$ が S の元の一般型である．特に $M \in L$ としても，これが S の元の一般型であることに変わりはない．

S がブール代数であることの証明をおもな目標として話を進めよう．そのために $(M^*)_*$ のような演算について少し考える．

まず B がブール代数である場合を考える．

x の補元を x^c で表わせば，$x \leqq y$ と $x \wedge y^c = 0$ とは同等な条件である．したがって，いま

$$M' = \{v \mid M \text{ のすべての元 } x \text{ に対して } x \wedge v = 0\}$$

と置けば，$v^c \in M^*$ と $v \in M'$ とが同等であり，また $u \in N_*$ と

$$u \in \{w^c \mid w \in N\}'$$

とが同等である．$\{w^c \mid w \in N\} = \{v \mid v^c \in N\}$ であるから，

$$(M^*)_* = \{v \mid v^c \in M^*\}', \quad \text{すなわち} \quad (M^*)_* = M''$$

が得られる．広義ブール代数の場合にも，上と同様に M' を定義すると，最後の式は正しいが，検証はやっかいである．

特に ideal のラティス L で考えれば，$J\in L$ のとき $J\frown J'$ が最小の ideal $\{0\}$ となること，また $J\frown J_1$ が $\{0\}$ に等しければ $J_1\subseteqq J'$ なることは明白である．

そこで話を一般的にして，L を最小元 0 のあるラティス，その元を x，y，…… とし，各元 x に対して

(1) $$x\frown x'=0,$$

(2) $$x\frown u=0 \quad ならば \quad u\leqq x'$$

なる元 x' が必ずある，すなわち $\{u|x\frown u=0\}$ には最大元がある，と仮定しよう．

まず x' が x に対して，y' が y に対して上の性質を持てば，$x\leqq y$ のとき順に

$$x\frown y'\leqq y\frown y'=0, \qquad x\frown y'=0, \qquad y'\leqq x'$$

を得るから，

(3) $$x\leqq y \quad ならば \quad y'\leqq x'$$

特に $y=x$ の場合には，

$$y'\leqq x' \quad かつ \quad x'\leqq y'$$

となって $y'=x'$；すなわち

(4) x' は x に対して 1 意に定まる．

そこで $\bar{x}=y''$ と定義すれば

(5) $$x'''=\bar{x}'=\bar{x}',$$

(6) $$x\leqq y \quad ならば \quad \bar{x}\leqq\bar{y}$$

また $x\frown y=0$ ならば $x\leqq y'$，$y''\leqq x'$，したがって

$$x\frown\bar{y}=(x\frown y''=)0$$

これを繰り返して

(7) $$x\frown y=0 \quad ならば \quad x\frown\bar{y}=0,\ \bar{x}\frown\bar{y}=0$$

また $x'\frown x=0$ により $x\leqq x''$，すなわち

(8) $$x\leqq\bar{x}$$

この x に x' を代入すれば $x'\leqq\bar{x}'$；一方（3）の y に $\bar{x}$ を代入して $\bar{x}'\leqq x'$ を得るから，（5）により

(9) $$x'=\bar{x}'$$

この x に x' を代入して

(10)　　$\bar{x}=\bar{\bar{x}}.$

特に（6），（8），(10) だけから

(11)　　$\overline{x \cup y}=\overline{\bar{x} \cup \bar{y}}$

(11)′　　$\overline{\bar{x} \cap \bar{y}}=\bar{x} \cap \bar{y}$

を導き出すことができる．しかし，ここではほかのことも用いて，(11)′よりも一般的な

(12)　　$\overline{x \cap y}=\bar{x} \cap \bar{y}$

を (11) とともに証明しよう．（6）と $x \cup y \geqq x$ から

$$\overline{x \cup y} \geqq \bar{x}$$

同様に $\overline{x \cup y} \geqq \bar{y}$，したがって

$$\overline{x \cup y} \geqq \bar{x} \cup \bar{y}$$

双対的に

$$\overline{x \cap y} \leqq \bar{x} \cap \bar{y}$$

特に

$$\overline{x \cup y}=\overline{\overline{x \cup y}} \geqq \overline{\bar{x} \cup \bar{y}}$$

一方 $x \leqq \bar{x}$，$y \leqq \bar{y}$ から $x \cup y \leqq \bar{x} \cup \bar{y}$，したがって

$$\overline{x \cup y} \leqq \overline{\bar{x} \cup \bar{y}}$$

これで (11) が得られた．$z=(x \cap y)'$ と置けば

$$x \cap y \cap z=0$$

（7）を用いて

$$\bar{x} \cap (y \cap z)=0$$

これを $(\bar{x} \cap z) \cap y=0$ と書き直して再び（7）を用いると

$$(\bar{x} \cap z) \cap \bar{y}=0$$

すなわち

$$\bar{x} \cap \bar{y} \cap z=0, \qquad \bar{x} \cap \bar{y} \leqq z'=\overline{x \cap y}$$

を得る．これと $\overline{x \cap y} \leqq \bar{x} \cap \bar{y}$ とから (12) が得られる．

この (11) に現われた $\overline{x \cup y}$ は，

$$\bar{x} \leqq u, \qquad \bar{y} \leqq u, \qquad \bar{u}=u$$

なる u の最小なものであり，(12) に現われた $\bar{x} \cap \bar{y}$ は，

$$v \leqq \bar{x}, \qquad v \leqq \bar{y}, \qquad \bar{v}=v$$

なる v の最大なものである．特に $\bar{x}=x$, $\bar{y}=y$ なる範囲に限定すれば，このことは，L の部分集合

$$L'=\{x\,|\,\bar{x}=x\in L\}$$

が順序 $\leqq$ に関してラティスをなし，L' の元 x, y の L' におけるジョイン，ミートが，それぞれ $\overline{x\vee y}$, $x\wedge y$ で与えられることを示す．

(11) と (12) は，対応 $L\ni x\to\bar{x}\ni L'$ がラティス準同型であることを表わす．

ここで L が分配的である場合に，L' がブール代数であることを示そう．(5)，(6) によって，L の任意の元 x に対して $x'\in L'$ であることが知られる．特に $0'\in L'$ であるが，$0'$ が L の最大元であることは (2) から明白で，それは L' の最大元となる．これを1で表わす．L' の元 x に対して，x' が L' における x の補元であることを示そう．まず $x\wedge x'=0$ は定義に含まれている．また，分配律を用いて

$$x'\wedge y'\wedge(x\vee y)=(x'\wedge y'\wedge x)\vee(x'\wedge y'\wedge y)=0\vee 0=0,$$

したがって $x'\wedge y'\leqq(x\vee y)'$．(3) によってこの逆の包含式も成り立つから，

$$x'\wedge y'=(x\vee y)'$$

ゆえに，$x\in L'$ に対しては

$$\overline{x\vee x'}=(x\vee x')''=(x'\wedge x'')'=(x'\wedge x)'=0'=1$$

これで，x' が L' における x の補元であることが知られた．L' は L に準同型で，L は分配的であるから，L' も分配的，したがってブール代数である．

前にもどって，あるブール代数 B の ideal のラティスを L とすれば，$L'=S$ となり，これは B の切断のラティスである．ゆえにブール代数の切断による完備化は再びブール代数である．

広義ブール代数では $L'=S$ の検証がやっかいである．そこで表現論が有力になる．B を一般ブール代数，L を B の ideal のラティスとする．また J, J_1, J_2 などを L の元とし，B の表現を

$$B\ni x\to E(x)\subseteqq E$$

とする．

Ideal J に，E における合併集合 $\bigcup\{E(x)\,|\,x\in J\}$ を対応させて，これを$E(J)$ で表わせば，$E(J)$ は開集合：$E(J)^{i}=E(J)$ であり，

$$J=\{x \mid E(x) \subseteqq E(J)\}$$

となる．逆に開集合 $X=X^{\mathrm{i}}$ に対しては B の部分集合

$$G=\{x \mid E(x) \subseteqq X\}$$

が B の ideal となって，$X=E(G)$ である．こうして B の ideal と，E における開集合との，1対1の対応 $J \longleftrightarrow E(J)$ が得られ，明らかに，$J_1 \subseteqq J_2$ と $E(J_1) \subseteqq E(J_2)$ とが同等になる．

そこで再び話を一般化して，任意の位相空間 E を考えよう．しばらく X，Y などは E の部分集合，X^{c} は E に関する補集合を表わすことにする．

$X^{\mathrm{i}} \subseteqq X$ は常に成り立つから

$$(X \cup Y)^{\mathrm{i}} \subseteqq X \cup Y$$

一方，$X \subseteqq Y$ ならば $X^{\mathrm{i}} \subseteqq Y^{\mathrm{i}}$ となることから，

$$(X \cup Y)^{\mathrm{i}} \supseteqq X^{\mathrm{i}}, \qquad (X \cup Y)^{\mathrm{i}} \supseteqq Y^{\mathrm{i}}$$

したがって

$$(X \cup Y)^{\mathrm{i}} \supseteqq X^{\mathrm{i}} \cup Y^{\mathrm{i}}$$

が得られる．特に

$$X=X^{\mathrm{i}},\ \ Y=Y^{\mathrm{i}}\ \text{ならば}\ (X \cup Y)^{\mathrm{i}}=X \cup Y=X^{\mathrm{i}} \cup Y^{\mathrm{i}}$$

公式 $X^{\mathrm{ii}}=X^{\mathrm{i}}$ によって $(X \cup Y)^{\mathrm{i}}$ は開集合，したがって開集合の合併集合は開集合である．また

$$(X \cap Y)^{\mathrm{i}}=X^{\mathrm{i}} \cap Y^{\mathrm{i}}$$

によって2つの開集合の共通部分も開集合である．

ゆえに，開集合の全体を L とすれば，L はベキ集合のラティス 2^E の部分ラティス，したがって分配的なラティスをなす．空集合 $\varnothing$ はその最小元であり，E は最大元である．

このラティス L の元 X，Z について，条件 $X \cap Z=\varnothing$ を考えよう．それは $Z \subseteqq X^{\mathrm{c}}$ と同等であるが，$Z \subseteqq X^{\mathrm{c}}$ ならば（$Z=Z^{\mathrm{i}}$ によって）$Z \subseteqq X^{\mathrm{ci}}$，逆に $Z \subseteqq X^{\mathrm{ci}}$ ならば（$X^{\mathrm{ci}} \subseteqq X^{\mathrm{c}}$ によって）$Z \subseteqq X^{\mathrm{c}}$ となる．ここで X^{ci} も L の元になっている．

すなわち，L の元 X に対して $X'=X^{\mathrm{ci}}$ は L の元であって，前に一般的に扱った条件

（1）$X \cap X'=\varnothing$,　　（2）$X \cap Z=\phi$ ならば $Z \subseteqq X'$

を満たす．そこでの記号 $\overline{X}$ については

$$\overline{X}=(X')', \qquad \overline{X}'=X'$$

であるから，$X'(X\in L)$ は L の部分ラティス

$$L'=\{X\,|\,X=\overline{X},\ X\in L\}$$

の元の一般型を与える．L の元の一般型は $X^{i}\,(X\subseteqq E)$ であるから，L' の元の一般型は X^{ici} である．Y として E の任意の部分集合をとれば Y^{c} が E の任意の部分集合を表わしうるから，上の一般型は Y^{cici} すなわち $(Y^{ccai}=)\,Y^{ai}$ とも書かれる．Y^{a} は閉集合一般を表わす．閉集合の内部となっているような（開）集合を**正則開集合**（regular open set）という．

したがって正則開集合の全体がちょうど L' と一致し，それはブール代数をなす．これが実は完備であることを示そう．

もっと一般に，ラティス L が完備なとき，L の各元 x に L の元 $\bar{x}$ を対応させて，

(α)　$x\leqq y$　ならば　$\bar{x}\leqq\bar{y}$,

(β)　$x\leqq\bar{x}$,

(γ)　$\bar{\bar{x}}=\bar{x}$

となるようにすれば，L の部分集合 $L'=\{x|\bar{x}=x\}$ は L における順序に関して完備なラティスをなす．

このことを示すために，M を L の任意の部分集合とし，L における $\sup M$ を y で表わす．(β) によって $\bar{y}$ はMの 1つの上界である．M の上界 z で $z=\bar{z}$ なるものを任意にとれば，$y\leqq z$ と (α) とから $\bar{y}\leqq z$ となる．(γ) を参照すれば，$\bar{y}$ はかような z の中で最小であることがわかる．特に $M\subseteqq L'$ のときは，$\bar{y}$ が L' における M の最小上界である．L' において任意の部分集合の最小上界があるから，L' は完備ラティスをなす．

さて位相空間にもどって，E の任意の部分集合 X に X^{i} を対応させれば，ラティス 2^{E} において，対応 $X\to X^{i}$ は (α), (β), (γ) に双対な性質を持つ．完備なラティスという概念は自己双対的であるから，$X=X^{i}$ なる X の全体，すなわち開集合の全体 L が完備である．次に $X\to\overline{X}=X''$ は L における対応として上の性質 (α), (β), (γ) を持つから，

$$L'=\{X|X''=X\}$$

すなわち正則開集合全体が完備なラティスをなす.

これは直接に $2^E \ni X \to X^{ai} \in L'$ えを考てもできることであるが,少し一般的に述べてみた.

さて一般に位相空間の正則開集合の全体が完備なブール代数をなすことから,一般ブール代数 B の表現空間 E にもどろう.

既に $J \longleftrightarrow E(J)$ によって B の ideal のラティスと E の開集合全体との間に1対1で順序を保存する対応がついている.ラティスの演算や,完備という条件などは順序から定義されているから,上の対応によってそれらの演算や条件は保存される.特に条件 $J_1 \frown J_2=\{0\}$ は条件 $E(J_1) \frown E(J_2)=0$ と同等である.したがって, ideal のラティスにおける J' (103 ページ参照) には $E(J)'$ が対応し,$S=\{J|J=J''\}$ には正則開集合の全体 $\{X|X=X^{ai}\}$ が対応する.それゆえ S は完備ブール代数である.

広義ブール代数の切断による完備化がブール代数になるというこの結果は,ブール代数の場合を含む.ただし前に証明した方法も簡単であり,表現論(したがって Zermelo の公理)を用いないですむ点は捨てがたいであろう.

第6章　modular ラティス

§29. 一　　般　　論

代数系の中で現在最も盛んに研究されている群，環などという代数系の基本的な性質の中には，個々の元よりもむしろ元のある集合，たとえば群の正規部分群とよばれるものや，環の ideal などが表面に現われて，個々の元はその背景に没し去っているものがある．射影幾何においても，ひとまずは点をその基本的な要素と考えるが，実はその特殊な集合である線型部分空間の相互関係が重要になる．これらの部門の基本的な命題は相互にはなはだ似た形をとることが多い．そのあるものから他の部門におけるものが導かれたりはするが，一般性を重視して，無用な仮定をできるだけ取り除こうとすれば，それらを一挙にまとめて論ずる方法が望まれる．それをある程度果たすのが modular ラティスの理論である．

Jordan および Hölder による群の Verfeinerungssatz とよばれるものは，modular ラティスでは律しきれないようであるが，その重要な特殊の場合については modular ラティス の理論が有効である．その他の，群論において基本的な定理のいくつかは，modular ラティスの理論から導かれるものと，ラティスを群に関係づけるものとに分かれる．前者はこれから述べるものであり，後者は同型定理，準同型定理などである．環論などにおいても同様であり，射影幾何においては，そのような翻訳のしかたが最初から明白である．これらの部門について初歩の知識を持つ人は翻訳を試みられたい．

名称や記号にも，これらの実例からの借用が多い．たとえば，ラティスにおいて $a \geqq b$ である元 a，b の対を商といって a/b で表わすのは，商群（剰余群）などというものを念頭に置いた定義である．

商 q と商 r を同時に

$$q=a \vee b/a, \qquad r=b/a \wedge b$$

と表わしうるとき，q と r は互いに他方の **転置** (transpose) であると

いって，記号では $q \approx r$ または $r \approx q$ と書き表わす．群論の初歩を知っている人は，第2同型定理において同型になる2つの商群を連想するであろう．modular ラティスにおいては，上記の商 q から定まる閉区間 $[a,\ a \vee b]$ と， 転置商 r から定まる閉区間 $[a \wedge b,\ b]$ はラティスとして同型である，ということが知られている．詳しくいうと，次のような **Dedekind の転置法則** が成り立つ：

modular ラティスにおいて，2通りの対応

$$[a,\ a \vee b] \ni x \longrightarrow x \wedge b \in [a \wedge b,\ b]$$
$$[a,\ a \vee b] \ni y \vee a \longleftarrow y \in [a \wedge b,\ b]$$

は互いに逆な対応であり，したがって，それぞれ $[a,\ a \vee b]$ または $[a \wedge b,\ b]$ から他方の上への1対1の写像であるが，さらにラティス同型対応である．また $[a,\ a \vee b]$ における商 x/x_1 と $[a \wedge b,\ b]$ における商 y/y_1 が―― x と y が，また x_1 と y_1 が――対応するとき

$$x/y \approx x_1/y_1 .$$

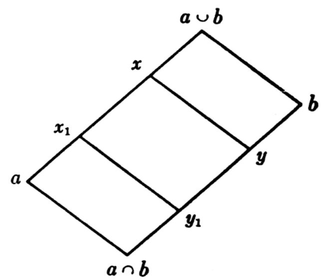


図 6.1

この法則を証明しよう．

$x \in [a,\ a \vee b]$のとき，まず $x \geqq a$ と modular 律により，次に $x \leqq b \vee a$ によって，

$$(x \wedge b) \vee a = x \wedge (b \vee a) = x .$$

同様に，$y \in [a \wedge b,\ b]$ のとき

$$(y \vee a) \wedge b = y$$

となるから，上の対応は互いに逆である．また，いずれも順序関係を保存することは明白であろう．ラティスの演算は順序関係で規定されるから，これらの対応はラティスの同型対応である． 最後に，$[a,\ a \vee b]$ における商 x/x_1 と，$b/a \wedge b$ における商 y/y_1 とが対応するとしよう．このとき

$$x_1 \wedge y = x_1 \wedge (x \wedge b) = (x_1 \wedge x) \wedge b = x_1 \wedge b = y_1 ,$$
$$y \vee x_1 = y \vee (y_1 \vee a) = (y \vee y_1) \vee a = y \vee a = x ,$$

したがって

$$x/x_1 = x_1 \vee y/x_1 \approx y/x_1 \wedge y = y/y_1 .$$

これで証明が終わった．

１つの射影空間における線型部分空間の全体がなすラティスについて，幾何学の用語を借りると，対応 $x\to x\cap b$ は部分空間 b による切断であり，対応 $y\to y\cup a$ は a からの射影である．この種の対応や，また，それらをたとえば右の図のように合成して得られる対応は，射影幾何学において扱う基本的な対応である．

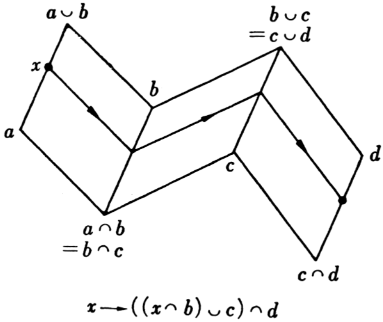


図 6.2

一般に，ラティスにおける商 q と商 q' を

$$q=q_0\approx q_1\approx\cdots\cdots\approx q_n=q'$$

のように，隣りどうしが転置になっている商の列で結びうるとき，q と q' は互いに**射影的**（projective）であるといい，記号では $q\sim q'$ と書くことにしよう．この関係 $\sim$ は同値関係になっている．また，転置法則による対応を上記の列に沿って順に合成することにより，次のように転置法則が拡張される．modular ラティスにおいて

$$u/v\sim u'/v'$$

ならば，〔v, u〕から〔v', u'〕の上へのラティス同型写像 φ を，次の条件を満たすように定めることができる：〔v, u〕における任意の商 x/x_1 に対して

$$x/x_1\sim\varphi(x)/\varphi(x_1).$$

射影的な商の例として，modular ラティスで $x\leqq\bar{x}$, $y\leqq\bar{y}$ ならば

$$(x\cup\bar{y})\cap\bar{x}/(x\cup y)\cap\bar{x}\ \sim\ (\bar{x}\cup y)\cap\bar{y}/(x\cup y)\cap\bar{y}$$

となることを示そう（ここの $\bar{x}$ は前節の対応 $x\to\bar{x}$ と無関係）．

まず，$x\cup y\leqq x\cup\bar{y}$ に注意して

$$\begin{aligned}(x\cup\bar{y})\cap\bar{x}/(x\cup y)\cap\bar{x}&=(x\cup\bar{y})\cap\bar{x}/(x\cup y)\cap(x\cup\bar{y})\cap\bar{x}\\&\approx((x\cup\bar{y})\cap\bar{x})\cup(x\cup y)/x\cup y\end{aligned}$$

最後の商において，modular 律により

$$\begin{aligned}((x\cup\bar{y})\cap\bar{x})\cup(x\cup y)&=(x\cup\bar{y})\cap(\bar{x}\cup x\cup y)\\&=(x\cup\bar{y})\cap(\bar{x}\cup y)\end{aligned}$$

したがって

$$(x\vee\bar{y})\wedge\bar{x}/(x\vee y)\wedge\bar{x}\approx(x\vee\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee y)/x\vee y$$

ここで x と y, $\bar{x}$ と $\bar{y}$ を入れ替えた式も同様に成り立つから

$$(\bar{x}\vee y)\wedge\bar{y}/(x\vee y)\wedge\bar{y}\approx(x\vee\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee y)/x\vee y$$

ゆえに上記の結論が得られる．

この例と拡張された転置法則とから，有名な Jordan-Hölder の定理が証明される．定理を述べやすくするための補助的な定義をしよう．

順序集合において，元の列 $(a_0, a_1, \cdots\cdots)$ が条件 $a_0>a_1>\cdots\cdots$ を満たすとき，この列を **下降列** という．有限な下降列

$$A=(a_0, \cdots\cdots, a_m)$$

から両端 a_0, a_m ではない項 a_i をいくつか取り除いた残りが

$$B=(b_0, \cdots\cdots, b_n)$$

になるか，または $A=B$ であるとき，A を 下降列 B の**細分** という．最初の条件を $a_0\geqq a_1\geqq\cdots\cdots$ に変更して 広義の下降列 を定義し，上記と同様に 広義の下降列の細分 を定義する．また，これらに双対な概念においては **上昇列** といのことばを 下降列 の代わりに用いる．

ラティスにおける広義の下降列 $A=(a_0, \cdots\cdots, a_m)$ に対しては，商 $q_i=a_i/a_{i-1}$ が番号 i の順に並んだ列 $(q_1, \cdots\cdots, q_m)$ を A から定まる商の列 ということにする．

さて **Jordan-Hölder の定理** は次の形に述べられる．

modular ラティスにおける2つの有限な下降列

$$C=(c_0, \cdots\cdots, c_m), \qquad D=(d_0, \cdots\cdots, d_n)$$

において両端が一致すれば，すなわち $c_0=d_0$, $c_m=d_n$ ならば，

$$C \text{ の細分}\quad U=(u_0, \cdots\cdots, u_k)$$
$$D \text{ の細分}\quad V=(v_0, \cdots\cdots, v_k)$$

で次の条件を満たすものがある（U と V の項数の一致に注意）：U から定まる商の列 $(q_1, \cdots\cdots, q_k)$ に対して，V から定まる商の列を適当に並べ換えて $(r_1, \cdots\cdots, r_k)$ とすることにより，同番号の項どうしをすべて $q_i\sim r_i$ にすることができる．

下降列の代わりに広義の下降列を考えても，同様な定理が成り立つ．まず，広義の下降列についての定理を証明するために

$$a_{ij}=(c_i\vee d_j)\wedge c_{i-1}, \qquad b_{ji}=(c_i\vee d_j)\wedge d_{j-1}$$

と置こう．明らかに

$$c_{i-1}=a_{i0}\geqq a_{i1}\geqq\cdots\cdots\geqq a_{in}=c_i,\qquad (1\leqq i\leqq m)$$

となる．それゆえ，a_{10} の後に

$$a_{11},\cdots\cdots a_{1n},\ a_{21},\cdots\cdots a_{2n},\cdots\cdots,\ a_{m1},\cdots\cdots a_{mn}$$

を置いた $mn+1$ 項の列を U とすれば，U は C の細分である．U から定まる商の列は，上の a_{ij} の列と同じ順に

$$q_{ij}=(c_i\cup d_{j-1})\cap c_{i-1}/(c_i\cup d_j)\cap c_{i-1}$$

を並べたものである．同様な理由で，b_{10} の後に

$$b_{11},\cdots\cdots b_{1m},\ b_{21},\cdots\cdots b_{2m},\cdots\cdots,\ b_{n1},\cdots\cdots b_{nm}$$

を置いた $mn+1$ 項の列を V とすれば，V は D の細分であり，V から定まる商の列は，上の b_{ji} の列と同じ順に

$$r_{ji}=(c_{i-1}\cup d_j)\cap d_{j-1}/(c_i\cup d_j)\cap d_{j-1}$$

を並べたものである．111 ページの例により

$$q_{ij}\sim r_{ji}$$

となる．ゆえに，広義の下降列についての定理が成り立つ．また，q_{ij} と r_{ji} に転置法則を適用して得る同型対応によれば，列 U において a_{ij} がその直前の項に等しい場合と，列 V において b_{ji} がその直前の項に等しい場合とが一致する．このような a_{ij} と b_{ji} をすべて取り除くことによって，本来の下降列についての定理が結論される．

Vector の1次独立性や射影空間の点の線型独立性に関する基本的な事項も modular ラティスによる抽象的取扱いが可能である．modular ラティスにおいて

$$a_1\cap a_2=0,\qquad (a_1\cup a_2)\cap a_3=0,\cdots\cdots$$
$$(a_1\cup\cdots\cdots\cup a_{n-1})\cap a_n=0$$

であるときに，列 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n$ が**独立**である (independent) といい，J. von Neumann が "**Continuous Geometry**" において用いた記号に従って，ここでは $(a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n)\perp$ としるす．なお $n=2$ のときはこれは $a_1\cap a_2=0$ なるただ1つの条件である．また $n=1$ ならば無条件に $(a_1)\perp$ とする．

さて $n=3$ の場合が基本的である．$(a,\ b,\ c)\perp$ すなわち

$$a\cap b=(a\cup b)\cap c=0$$

とすれば，まず $a\cap c=0$ は明白である．次に modular 律によって

$$((a \cup c) \cap b) \cup a = (a \cup c) \cap (b \cup a)$$
$$= a \cup (c \cap (b \cup a) = a \cup 0 = a$$

したがって

$$(a \cup c) \cap b = ((a \cup c) \cap b) \cap a$$
$$= (a \cup c) \cap (b \cap a) = (a \cup c) \cap 0 = 0$$

ゆえに $(a, c, b)\perp$ となる．また $(b, a, c)\perp$ も明白で，結局

$$(a, b, c)\perp \quad \text{ならば} \quad (a, c, b)\perp \text{ かつ } (b, a, c)\perp$$

すなわち，3項の列の独立性を考えるとき，前の2項を交換してもよく，後の2項を交換してもよい．これを繰り返して，3項の列における項を任意の順に並べ換えても独立性に影響しないことがわかる．

この明快な結論は，modular ラティスについて考えるときの有力な拠点としてしばしば利用される．上記の短い計算は急所の一撃である．

$n \geqq 4$ の場合にも，列 $(a_1, \cdots\cdots, a_n)$ からある項 a_i と a_{i+1} を交換して得られた列を $(b_1, \cdots\cdots, b_n)$ とすれば，前者が独立であるとき後者も独立であることが，次のように証明される．

$i=1$ の場合については明白であるから，$i>1$ として考える．

$1 \leqq j \leqq n$ とすれば，$j<i-1$ のときも $j>i$ のときも

$$b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_j = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_j, \qquad b_{j+1} = a_{j+1}$$

であるから，独立性の仮定により

$$(b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_j) \cap b_{j+1} = 0.$$

この式が $j=i-1$ の場合にも $j=i$ の場合にも成り立つことを示せば，証明は終わる．$j=i-1$ の場合には

$$b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_j \leqq a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_i$$

で，両辺と a_{i+1} とのミートをとれば右辺が0に，したがって左辺も0になるが，一方，$b_{j+1} = a_{i+1}$ であるから，上の等式を得る．次に $j=i$ の場合には

$$a = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_{i-1}, \qquad b = a_i, \qquad c = a_{i+1}$$

と置き，上記の $n=3$ の場合を適用すればよい．

一般に列 $(a_1, \cdots\cdots, a_n)$ を任意の順に並べ換えることは，相隣る項を交換することを繰り返せばできる．ゆえに，$(a_1, \cdots\cdots, a_n)$ を任意の順に並べ換えて得た列を $(b_1, \cdots\cdots, b_n)$ とするとき，

$$(a_1, \cdots\cdots, a_n)\perp \quad \text{ならば} \quad (b_1, \cdots\cdots, b_n)\perp.$$

$a_1, \cdots\cdots, a_n$ が独立であるとき，この列から任意にいくつかの項を取り出して――ただし同じ項を繰り返して取り出すことはしないで――作った列 $x_1, \cdots\cdots, x_p$ も独立である．これを証明するには，x_k の列が初めに並ぶように，a_i の列を並べ換えて考えればよい．結論は定義によりほとんど明白である．たとえば $(a, b, c, d)\perp$ として a, c, d を考えてみよう．もとの列の並べ換えにより $(a, c, d, b)\perp$，すなわち

$$a \wedge c=0 \qquad (a \vee c)\wedge d=0 \qquad (a \vee c \vee d)\wedge b=0$$

であるが，初めの2つの等式によって $(a, c, d)\perp$ となる．

また,たとえば次のように,いくつかの項をジョインでまとめても，独立性が保存される：最初の矢印については独立性の定義によって明白．

$$(a, b, c, d, e, f)\perp \longrightarrow (a \vee b \vee c, d, e, f)\perp$$
$$\longrightarrow (d, f, a \vee b \vee c, e)\perp \longrightarrow (d \vee f, a \vee b \vee c, e)\perp$$

一般に，与えられた有限個の項を

$$a_1, \cdots\cdots, a_m, b_1, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots\cdots$$

のように区分して並べ，区分ごとのジョインを

$$a=a_1 \vee \cdots\cdots \vee a_m, \qquad b=b_1 \vee \cdots\cdots \vee b_n, \qquad \cdots\cdots\cdots$$

としよう．このとき

$$(a_1, \cdots\cdots, a_m, b_1, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots\cdots)\perp \tag{1}$$

ならば

$$(a, b, \cdots\cdots)\perp \tag{2}$$
$$(a_1, \cdots\cdots, a_m)\perp, \quad (b_1, \cdots\cdots, b_n)\perp, \quad \cdots\cdots\cdots \tag{3}$$

となる．証明は，上の例にならえばよいから省略する．

逆に（2）と（3）から（1）を導き出すことができる．それには簡単な場合として

$$(a_1, \cdots\cdots, a_m)\perp, \qquad (b_1, \cdots\cdots, b_n)\perp, \qquad (a, b)\perp$$

のとき $(a_1, \cdots\cdots, a_m, b_1, \cdots\cdots, b_n)\perp$ であることを証明し，これを繰り返して適用すればよい．

上記の簡単な場合の証明をするには，

$$(a_1 \vee \cdots\cdots \vee a_m)\wedge b_1=0$$
$$(a_1 \vee \cdots\cdots \vee a_m \vee b_1 \vee \cdots\cdots \vee b_i)\wedge b_{i+1}=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

を証明すればよい．第1式の左辺 $\leqq a \wedge b=0$ であるから，第1式は問題ない．また

$$d=b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_i$$

とおけば，仮定から $d \cap b_{i+1}=0$ を得る．一方

$$(d \cup b_{i+1}) \cap a \leqq b \cap a=0$$

でもあるから $(d,\ b_{i+1},\ a)\perp$．ゆえに $(d,\ a,\ b_{i+1})\perp$，したがって，$(d \cup a) \cap b_{i+1}=0$．これは第2式である．

以上の独立性の議論は，最小元 0 を持つ modular ラティスで行なった．任意の modular ラティスにおいても，1つの元 e を固定して，部分ラティス $\{x|x \geqq e\}$ における独立性を論ずることもできる．それを初めのラティスで考えれば，上の理論で 0 の代わりに e を置いたものとなる．この意味での独立性を **e の上に独立**などといい表わす．それは，たとえば剰余群の独立性に相当する．

群の直既約分解に関する直既約因子の入れ替えの定理 (Krull-Remak-Schmidt-Ore) も modular ラティスで論ぜられるが，それには後に述べる次元の概念がいる．証明などは省くが，興味があれば 中山 正：“束論”（岩波書店）参照；あるいは 群論における証明を 束論のことばに翻訳しても同じことである．

§30. 次元と modular 関数

次元の話には既に Hasse の図式のところで触れた．まず一般の順序集合で次の性質を持つものを考えよう：空でない部分集合は必ず極大元を持ち（**極大条件**），また極小元を持つ（**極小条件**）．極大条件は上昇列が必ず有限で終わることと同等であり（ただし Zermelo の公理を要する）極小条件はその双対である．これらの条件によって，その順序集合自身が空でないラティスならば，最大元1，最小元0を持つことになる．

$a<x<b$ なる元 x がなく，しかも $a<b$ であるとき，$a \lessdot b$ または $b \gtrdot a$ としるそう．$a<b$ であるとき，$a=x_0<x_1<\cdots\cdots<b$ なる列 $x_0,\ x_1,\ \cdots\cdots$ を作っていけば，有限回で，もはや延長できなくなる．その最後の項 x は $a \leqq x \lessdot b$ となっている．この x をあらためて x_1 とし，b を x_0 として

$$b=x_0 \gtrdot x_1 \geqq a$$

と書いておこう．もしも $x_1>a$ ならば，同様に $x_1 \gtrdot x_2 \geqq a$ となる x_2 がある．以下同様に続けると，x_i の下降列がやがて終わって

$$b=x_0 \succ\!\!\!\!\cdot \cdots\cdots \succ\!\!\!\!\cdot\, x_n=a$$

となる．このように列（$x_0, \cdots\cdots, x_n$）の項が順に $\succ\!\!\!\!\cdot$ で結ばれて下降列をなすか，または項が順に $\cdot\!\!\!\!\prec$ で結ばれて上昇列をなすとき，この列を**連結した鎖**（connected chain）といい，n をその **長さ** という．

特にただ一つの元 x_0 から成る，**長さ 0** の連結した鎖も考える．上の場合に a を鎖の**下の端**，b を**上の端**といおう．

以下，特に modular ラティスで前の条件を満たすものを考える．Jordan-Hölder の定理によれば，両端 a, b を固定したとき，連結した鎖をいかにとっても，その長さはすべて互いに等しい：連結した鎖 C の細分は C に一致するからである．したがって長さは 商 b/a で定まる．これを b/a なる商の**次元**（dimension）といい，$\dim(b/a)$ で表わす．また $\dim(1/0)$ をラティスの次元という．

次の恒等式が定義から直ちに導き出される．

$$\dim(c/b)+\dim(b/a)=\dim(c/a) \qquad (a \leqq b \leqq c)$$

また，〔a, b〕と〔a', b'〕が同型ならば b/a と b'/a' は等しい．特に Dedekind の転置法則により

$$\dim(x \vee y/x)=\dim(y/x \wedge y).$$

このように特殊なラティスにおける特殊な関数に限らず，一般のラティスにおいて，商 x/y の実数値関数 $m(x/y)$ に対して，恒等式

$$m(x \vee y/x)=m(y/x \wedge y)$$

$$m(u/v)+m(v/w)=m(u/w) \qquad (u \geqq v \geqq w)$$

が成立するとき，m を**商の modular 関数**という．たとえば定数，すなわち商のいかんにかかわらず一定した値を $m(x/y)$ がとる場合，それは modular 関数である．また次のような例も，modular ラティスにおいては考えられる．$f \cdot\!\!\!\!\prec e$ なる商 e/f を**素商**（prime quotient）というが，素商の１つを π として固定しておく．π と射影的な商はやはり素商である．そこで任意の商 b/a に対して，連結した鎖

$$b=x_0,\ x_1, \cdots\cdots,\ x_n=a$$

を考え，これから定まる商の列の中で π と射影的な商の個数を k とする．Jordan-Hölder の定理によって，k は鎖のいかんにかかわらず a と b とによって定まることが知られる．これを b/a に対応させれば１つの modular 関数が得られる．それを**素商 π に関する次元**という．

商の modular 関数 $m(x/y)$ が与えられたとして，1つの元 a を固定し，x の関数 $m(x)$ を次のように定義してみよう：

$$m(x)=m(x/a\wedge x)-m(a/a\wedge x)$$

いま $w\leqq x$, $w\leqq a$ とすれば，modular 関数の定義の第2式により，ここでの $a\wedge x$ の代わりに w を使うことができる：

$$m(x)=m(x/w)-m(a/w) \qquad (w\leqq a,\ w\leqq x)$$

この関数 $m(x)$ を用いて $m(x/y)$ を表わすことができる．それには

$$m(x/y)+m(y/w)=m(x/w) \qquad (w\leqq a,\ w\leqq y)$$

の両辺から $m(a/w)$ を引く．そうすると左辺は $m(x/y)+m(y)$ になるから，$m(x/y)$ は次のように表わされる：

$$m(x/y)=m(x)-m(y)$$

$m(x/y)$ をこの形に分解する関数がほかにもあったとして，それを関数 $n(x)$ とすれば，$x\geqq y$ のときには $m(x/y)$ の分解によって

$$n(x)-m(x)=n(y)-m(y)$$

一般の x, y については，$x\geqq x\wedge y$ と $y\geqq x\wedge y$ により，$x\wedge y$ に対する値と比較して，やはり上の式を得る．したがって $n(x)-m(x)$ の値は一定である．逆に，$n(x)-m(x)$ の値が一定ならば，関数 $n(x)$ によって $m(x/y)$ は上のような形に分解される：これは明白．

また，商の modular 関数の定義における第1式の両辺を分解すると

$$m(x\vee y)-m(x)=m(y)-m(x\wedge y).$$

一般に，ラティスにおける **元の modular 関数** とは，恒等式

$$m(x\vee y)+m(x\wedge y)=m(x)+m(y)$$

の成り立つ関数 $m(x)$ をいう．

> ラティスにおける商の modular 関数 $m(x/y)$ は
>
> $$m(x/y)=m(x)-m(y)$$
>
> の形に分解される．$m(x/y)$ をこのように分解する関数 $m(x)$ の1つをとれば，それに任意定数を加えたものが関数 $m(x)$ の一般形になる．このような $m(x)$ はラティスの元の modular 関数である．逆に，ラティスの元の modular 関数 $m(x)$ から上の等式で定められる $m(x/y)$ は，商の modular 関数である

今後は，特別な事情がない限り，そのとき取り扱う関数 $m(x/y)$ と $m(x)$ はこのような相互関係にあるものとしよう．

特に極大，極小条件を満たす modular ラティスにおいて

$$m(x/y)=\dim(x/y), \qquad a=0$$

とすれば，

$$m(x)=\dim(x/0)$$

となる．この $m(x)$ を**元 x の次元**といい，$\dim(x)$ としるす．射影空間の線型部分空間の全体がなす modular ラティスにおける次元は，幾何学的次元に1を加えたものになる．元の次元は，いわば元の大きさの目安を与えるものであって，

$$x\leqq y \quad \text{ならば} \quad \dim(x)\leqq\dim(y)$$

である．また商 x/y の次元は閉区間〔y, x〕の大きさの目安を与えて

$$[v,\ u]\subseteqq[y,\ x] \quad \text{ならば} \quad \dim(u/v)\leqq\dim(x/y)$$

である．

一般のラティスにもどり，modular 関数 $m(x/y)$ に対して，

$$[v,\ u]\subseteqq[y,\ x] \quad \text{ならば} \quad m(u/v)\leqq m(x/y)$$

という条件を考えよう．元の modular 関数に移れば，上の条件は

$$x\geqq y \quad \text{ならば} \quad m(x)\geqq m(y)$$

という条件と同等である．それはまた

$$\text{常に} \quad m(x/y)\geqq 0$$

という条件とも同等である．

このような modular 関数に対し，x と y の距離 (distance) を

$$\mathrm{dist}(x,\ y)=m(x\vee y/x\wedge y)$$

と定義すれば，任意の x, y, z に対して不等式

$$\mathrm{dist}(x\vee z,\ y\vee z)+\mathrm{dist}(x\wedge z,\ y\wedge z)\leqq\mathrm{dist}(x,\ y),$$

$$\mathrm{dist}(x\vee z,\ y\vee z)\leqq\mathrm{dist}(x,\ y),\quad \mathrm{dist}(x\wedge z,\ y\wedge z)\leqq\mathrm{dist}(x,\ y),$$

$$\mathrm{dist}(x,\ z)\leqq\mathrm{dist}(x,\ y)+\mathrm{dist}(y,\ z)$$

が成り立つことが証明される．

証明：まず分配包含式から

$$m((x\wedge z)\vee(y\wedge z))\leqq m((x\vee y)\wedge z),$$

$$-m((x\vee z)\wedge(y\vee z))\leqq -m((x\wedge y)\vee z).$$

これと

$$m((x\vee z)\vee(y\vee z))-m((x\wedge z)\wedge(y\wedge z))$$

$$=m(x\vee y\vee z)-m(x\wedge y\wedge z)$$

を加えれば

$$\text{左辺の和}=\mathrm{dist}(x\vee z,\ y\vee z)+\mathrm{dist}(x\wedge z,\ y\wedge z),$$

$$\text{右辺の和}=m(x\vee y)+m(z)-(m(x\wedge y)+m(z))=\mathrm{dist}(x,\ y)$$

となって最初の不等式が出る．その次の 2 つの不等式はもう明白である．それらの法則から

$$\mathrm{dist}(x\vee y\vee z,\ x\vee y)\leqq\mathrm{dist}(y\vee z,\ y),$$

$$\mathrm{dist}(y\wedge z,\ x\wedge y\wedge z)\leqq\mathrm{dist}(y,\ x\wedge y)$$

を得るが，一般に $u\geqq v$ なら $\mathrm{dist}(u,\ v)=m(u/v)$ であるから，上式の dist を m で置き換え，更にその和に $m(x\vee y/y)+m(y/y\wedge z)$ を加えれば，

$$\text{左辺の和}=m(x\vee y\vee z/x\wedge y\wedge z),$$

$$\text{右辺の和}=m(x\vee y/x\wedge y)+m(y\vee z/y\wedge z).$$

ところが $m(x\vee z/x\wedge z)\leqq$ 左辺の和 であるから，最後の不等式が成り立つ．

2変数 x，y の関数 $\mathrm{dist}(x,\ y)$ の性質

$$\mathrm{dist}(x,\ y)+\mathrm{dist}(y,\ z)\geqq\mathrm{dist}(x,\ z)$$

$$\mathrm{dist}(x,\ y)=\mathrm{dist}(y,\ x)\geqq 0$$

$$\mathrm{dist}(x,\ x)=0$$

は，いわゆる**擬距離**の性質である．これに対して更に

$$x\neq y\quad\text{ならば}\quad\mathrm{dist}(x,\ y)>0$$

という **分離性** を追加して，一般の集合 E（ラティスに限らない）における2変数の関数 $\mathrm{dist}(x,y)$ がこれらの性質を持つとき，これを E における **距離関数** または **メトリック**（metric）という．距離関数を 1 つ指定すると，それに関して通常のように極限や連続性の議論をすることができる．たとえば，x を E の元——むしろ E の点という——とし，点の無限列 $(x_1,\ x_2,\cdots\cdots)$ に対して

$$\lim\mathrm{dist}\ (x,\ x_n)=0\qquad(n\to\infty)$$

であるとき，x をその点列の**極限**という．距離関数を定めておく限り，相異なる 2 点が同じ点列の極限にはなりえない（証明 省略），すなわち点列 $x_1,x_2,\cdots\cdots$ の極限は存在すれば 1 意に定まる．この極限を $\lim x_n$ で表わす．

距離関数が 1 つ指定されている集合を**距離空間**という．それの任意の

部分集合も同じ距離関数に関して距離空間と考えられる．これを**部分距離空間**という．また実数の列の収束に関する Cauchy の判定条件に相当して，次の条件を考よう：

$$\lim \mathrm{dist}(x_m,\ x_n)=0 \qquad (m,\ n\to\infty)$$

この条件を満たす点列（x_1, x_2, ……）に対して必ずそれの極限が存在するとき，その距離空間は**完備**であるという．いかなる距離空間 S もある完備距離空間 E の部分距離空間と考えられること，特に E の任意の点は S のある点列の極限となるように完備距離空間 E を構成しうることが知られている．この E を S の**完備化**という．

ラティスの場合にもどって，modular 関数 $m(x/y)$ から前記のように $\mathrm{dist}(x/y)$ を定めると，これが分離性を持つということは，

$$x>y \quad ならば \quad m(x/y)>0$$

という条件と同等である．この条件を満たす modular 関数 $m(x/y)$ を**正値** (positive) **modular 関数**という．正値 modular 関数が 1 つ指定されているラティスを**距離づけられたラティス**といって，その正値 modular 関数から定まる距離関数について距離空間と考える．そのようなラティスにおいて，もしも

$$e=a\wedge b=a\wedge c, \qquad f=a\vee b=a\vee c, \qquad b\leqq c$$

ならば，

$$m(c/b)=m(f/e)-m(f/c)-m(b/e)$$
$$=m(f/e)-m(f/c)-m(c/e)=0$$

によって $c=b$ となる．これは，距離づけられたラティスは modular ラティスであることを示している．なお，上記の分離性は

$$x>y \quad ならば \quad m(x)>m(y)$$

とも表わされることに注意しよう．

距離づけられたラティス L の空でない部分集合 M を考えよう．M の有限個の元のミートとして得られる元の全体を作り，それを N とすれば，M の下界と N の下界とは一致する．N の元のミートは再び N に属する．N の下界が少なくも 1 つあると仮定し，それを a とすれば N のいかなる元 x に対しても $m(x)\geqq m(a)$ であるから，よく知られた実数の性質によって，$\{m(x)\,|\,x\in N\}$ の最大下界 m_0 があり，また

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n)=m_0$$

なる N の元の列 $(x_1,\ x_2,\cdots\cdots)$ がある．この列の代わりに

$$(x_1,\ x_1\cap x_2,\ x_1\cap x_2\cap x_3,\cdots\cdots)$$

をとってもよいから，$x_1\geqq x_2\geqq\cdots\cdots$ と仮定してよい．そうすると，$\mathrm{dist}(x_n, x_p)$ は $n\leqq p$ のとき $m(x_n)-m(x_p)$ に等しいから，

$$\lim \mathrm{dist}(x_m,\ x_n)=0 \qquad (m,\ n\to\infty)$$

距離空間 L が完備であるとすれば，

$$x=\lim x_n$$

なる元 x が存在する．119ページの不等式から容易に，

$$\mathrm{dist}(x,\ x\cup y)=\lim \mathrm{dist}(x_n,\ x_n\cup y)$$

$$\mathrm{dist}(x,\ x\cap y)=\lim \mathrm{dist}(x_n,\ x_n\cap y)$$

を得る．y が N の下界ならば，$x_n=x_n\cup y$ であるから

$$\mathrm{dist}(x,\ x\cup y)=0,\ x=x\cup y\geqq y.$$

また $y\in N$ ならば，

$$\mathrm{dist}(x_n,\ x_n\cap y)=m(x_n)-m(x_n\cap y)\leqq m(x_n)-m_0$$

により

$$\mathrm{dist}(x,\ x\cap y)=0,\ x=x\cap y\leqq y.$$

ゆえに x は N の最大下界，したがって M の最大下界である．

結局，距離づけられたラティス L が距離空間として完備ならば，ラティスとしては（上の議論の双対も考えに入れて）条件的に完備であり，部分集合 M の最大下界 x は M の有限個の元のミートの広義下降列 $x_1, x_2,\cdots\cdots$ の極限 $\lim x_n$ として得られ，その双対も成り立つ．ここで $\lim m(x_n)=m(x)$ となることもすぐ知られる．前の議論を見直せば，空でない部分集合 M が下界を持つためには実数の集合

$$\{m(u_1\cap\cdots\cdots\cap u_n)\,|\,u_1,\cdots\cdots,\ u_n\in M\}$$

が下界を持つことが（必要かつ）十分であることが知られよう．このことの双対も真である．したがって，もしも modular 関数 $m(x/y)$ の値の全体が下界または上界を持てば，L は完備ラティスとなる．

しかし，距離空間としての完備性はラティスとしての完備性の必要条件ではない．たとえば，実数 $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots$ および -1 の全体を大小の順序とともに考えれば，全順序集合，したがって modular ラティスであり，$m(x/y)=x-y$ と定義すれば，これは正値 modular 関数である．これは距離空間として完備でなく，ラティスとして完備である．

§31. 広義射影幾何

n 次元のベクトル空間 V における線型部分空間の全体は，1つの modular ラティスをなし，最小元0，最大元 $1(=V)$ を持つ．ベクトルを数の n 個の組で表わせば，このラティスの0は，$(0, 0, \cdots\cdots, 0)$ というベクトルだけから成る部分空間である．1つのベクトルをとり，その実数倍だけから成る線型部分空間を p とすれば，このラティスにおいて $p=0$ かまたは $0 \lessdot p$ である．射影幾何と考えれば，$0 \lessdot p$ なる p がいわゆる点である．

一般に，最小元のあるラティスにおいて，$0 \lessdot p$ なる元 p を**原子元**という．ベクトル空間の線型部分空間全体がなすラティスでは，最大元1は原子元のジョイン

$$1=p_1 \cup \cdots\cdots \cup p_n$$

と表わされる：それには p_i を定めるベクトル $(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n)$ として，

$$\alpha_i=1, \quad \alpha_j=0 \quad (i \neq j)$$

なるものをとればよい．

最大元1，最小元0を持つ modular ラティスにおいて，上のように最大元1が原子元のジョインとして表わされる場合には，$a>0$ なる任意の元 a がやはり原子元のジョインとして

$$a=q_1 \cup \cdots\cdots \cup q_k \qquad 0 \lessdot q_1, \cdots\cdots, 0 \lessdot q_k$$

と表わされることを証明しよう．その途中で明らかになる事項も重要である．

$u \lessdot v$ は，商 v/u がちょうど2個の元から成ることと同等である．互いに変換であるような商は，一方がこの性質を持つとき，Dedekind の法則により他方も同じ性質を持つ．さて p を原子元，x を任意の元とし，$p \leqq x$ でないとすれば，$x \cap p < p$ であるから $x \cap p=0 \lessdot p$ したがって $x \lessdot x \cup p$ である．

$1=p_1 \cup \cdots\cdots \cup p_n$ において，$p_{i+1} \leqq p_1 \cup \cdots\cdots \cup p_i$ なる p_{i+1} をすべて取り除いてもジョインは1になるから，最初からこのような包含式は決して成り立たないものと仮定する．そのとき

$$s_i=p_1 \cup \cdots\cdots \cup p_i$$

とおけば，連結した鎖 $0 \lessdot s_1 \lessdot \cdots\cdots \lessdot s_n=1$ を得る．

さて $y \geqq z$ のとき，$x \frown y/x \frown z$ は〔z, y〕に含まれるある商 w/z の転置である．実際，〔z, y〕の元

$$w = y \frown (x \smile z) = (y \frown x) \smile z$$

をとれば

$$x \frown y/x \frown z = x \frown y/x \frown y \frown z \approx (x \frown y) \smile z/z = w/z$$

となる．特に

$$z \lessdot y \text{ ならば} \quad z = w \text{ または } z \lessdot y = w$$

であるから，上記 $x \frown y/x \frown z \approx w/z$ により，

$$z \lessdot y \text{ ならば} \quad x \frown z = x \frown y \quad \text{または} \quad x \frown z \lessdot x \frown y$$

である．

そこで任意の元 $a(>0)$ をとって $a \frown s_i$ を a_i とすれば，$0 \lessdot a_1$ または $0 = a_1$ であり，$a_i \lessdot a_{i+1}$ または $a_i = a_{i+1}$ であり，$a_n = a$ である．したがって 0 と a とは連結した鎖で結ばれ，その長さは n を越えない．このことから，考えるラティス L が極大，極小条件を満たすことがわかる．

L が可補的であることを示そう．L の元 a が与えられたとして，

$$(a, r_1, \cdots\cdots, r_k) \perp \qquad \{r_1, \cdots\cdots, r_k\} \subseteqq \{p_1, \cdots\cdots, p_n\}$$

なる $r_1, \cdots\cdots, r_k$ の最大個数をとり，それが，ちょうどここに書いたもので到達されたとする．そのような $r_1, \cdots\cdots, r_k$ が全然なければ，どの i についても常に $a \frown p_i > 0$，したがって $a \geqq p_i$ となって $a = 1$，そして 0 が a の補元である．これ以外の場合には

$$b = r_1 \smile \cdots\cdots \smile r_k$$

とおけば，ここに現われない p_i に対しては，$(a, r_1, \cdots\cdots, r_k, p_i)$ が独立でないから $(a \smile b) \frown p_i > 0$，すなわち

$$a \smile b \geqq p_i .$$

ゆえに $a \smile b \geqq p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ となり

$$a \smile b = 1 .$$

そして $(a, r_1, \cdots\cdots, r_k) \perp$ により

$$a \frown b = 0 .$$

ゆえに b は a の補元である．

可補的な modular ラティスの区間〔0, c〕はやはり可補的である．なぜならば〔0, c〕の元 a の補元 b に対して

$$c \wedge b \wedge a = c \wedge 0 = 0$$
$$(c \wedge b) \vee a = c \wedge (b \vee a) = c \wedge 1 = c$$

となって，$c \wedge b$ は〔0, c〕における a の相対補元になる．また $c \geqq d$ のとき，可補的な modular ラティス〔0, c〕にこの事実の双対を適用すると，〔d, c〕もまた可補的であることが知られる．結局，可補的な modular ラティスは相対可補的である．これは分配的な場合の拡張になっている．

さて，$a > 0$ なる元 a と 0 とを結ぶ連結した鎖

$$0 = x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots\cdots \lessdot x_k = a$$

をとり，q_i ($i \geqq 1$) を〔0, x_i〕における x_{i-1} の相対補元とすれば，

$$x_1 = q_1,\ \ x_2 = q_1 \vee q_2,\ \ x_3 = q_1 \vee q_2 \vee q_3, \cdots\cdots$$
$$a = x_k = q_1 \vee \cdots\cdots \vee q_k$$

となる．x_i/x_{i-1} と $q_i/0$ とは互いに転置であるから $0 \lessdot q_i$，すなわち q_i は原子元である．最初に掲げた目標はこれで達せられた．

最大元が原子元のジョインとして表わされるような modular ラティスは極大極小条件を満たす可補的な modular ラティスであることも，ここで証明された．その逆も成り立つことは，$a(>0)$ が原子元のジョインとして表わされることの証明の最後の部分から知られる．

この節の最初にいった射影幾何との関係を考えれば，ここに射影幾何学の基本的な命題が得られる．あらためて〔x〕$=\dim(x)-1$ とおいて，知識を整理してみよう．

P$_1$： L はラティスであり，各元 x に整数〔x〕が1意に対応し，

$x > y$ ならば 〔x〕$>$〔y〕

$y \lessdot x$ ならば 〔x〕$=$〔y〕$+1$

また L は最大元1と最小元0を持ち，〔1〕$=n-1$，〔0〕$=-1$．

P$_2$： $0 \lessdot p$ であって $p \leqq y$ でなければ，

〔$y \vee p$〕$=$〔y〕$+1$

また〔x〕$\geqq 0$ ならば，上のような y と p で $x = y \vee p$ なるものが存在する．

P$_3$： $x \geqq y$，$x \geqq z$，〔x〕$=$〔y〕$+1$，〔z〕$=1$ ならば，

$$y \wedge z > 0.$$

（これは〔y〕$+$〔z〕$=$〔$y \vee z$〕$+$〔$y \wedge z$〕からすぐわかる）．

これらは，L の元を射影空間の線型部分空間，〔x〕を幾何学的次元と考えれば，射影幾何学の基本命題，いわゆる公理である．そのとき0は空集合であり，〔x〕=0，1，2 はそれぞれ x が点，直線，平面であることを表わす．$y \leqq x$ は“y が x の上にある”あるいは“x が y を通る”ことであり，$x \cup y$ は x と y との張る線型部分空間である．射影幾何学の公理系には，ふつう次の公理が加えられている．

P_4：　一直線の上には相異なる3点がある．

もっとも一般な意味の射影幾何学は，これらの公理系から出発して，そのような対象の性質を研究するものと考えられる．そこで，かようなラティス L を**射影幾何**（「学」を除く）といってよいであろう．この立場で，いままでとは逆に，射影幾何は1つの可補的な modular ラティスであることを証明しよう．条件 P_4 はその途中では用いられない．

まず P_1 によって，射影幾何は極大極小条件を満たす．また

$$x \geqq y \text{ かつ } [x]=[y] \qquad \text{ならば} \quad x=y$$

$$x \geqq y \text{ かつ } [x]=[y]+1 \qquad \text{ならば} \quad y \lessdot x$$

特に〔x〕=0 は $0 \lessdot x$，すなわち x が原子元であることを表わす．なお，いかなるラティスにおいても，原子元 p に対しては，$p \leqq x$ でないことと $x \cap p=0$ とが同等であることに注意しよう．原子元 p，q については，$p \neq q$ と $p \cap q=0$ とが同等である．今後しばらく p，q などは原子元を表わすことにする．

P_2 を繰り返し用いれば，$x>0$ なる元 x は $x=p_1 \cup \cdots\cdots \cup p_k$ のように原子元の結びとして表わされることがわかる（極小条件が用いられる）．したがって，もしも x，y の間に

$$p \leqq x \text{ なる } p \text{ に対しては } p \leqq y$$

という関係があれば，$x \leqq y$ である．対偶に移って，$x \leqq y$ でなければ，ある p に対して，$p \leqq y$ でなく $p \leqq x$，すなわち

$$y \cap p=0, \qquad p \leqq x.$$

特に $y<x$ であるときには，$y_1=y \cup p$ とおけば $y<y_1 \leqq x$ となる．もし $y_1<x$ ならば，再び

$$y_1 \cap p_1=0, \qquad p_1 \leqq x$$

なる p_1 がある．この操作の繰返しは，極大条件により，いつか終わる．すなわち，$y<x$ のときには，ある z と q に対して

$$y \leqq z, \qquad z \cap q = 0, \qquad z \cup q = x.$$

このことは後に使う．

さて一般に，

$$x \cap (p \cup y) = z \leqq y, \qquad p \cap y = 0$$

ならば

$$x \cap p = 0, \qquad (x \cup p) \cap y = z$$

となることを示そう．まず

$$x \cap p = z \cap p \leqq y \cap p = 0$$

によって $x \cap p = 0$． 次に $z' = (x \cup p) \cap y$ とおけば $z \leqq z'$ は明白．$z' \leqq x$ を示せば $z' \leqq z$ となって目的を達する． 仮りに $z' \leqq x$ を否定すれば，前ページで（$x \leqq y$ でない場合について）述べたように

$$q \leqq z', \qquad q \cap x = 0$$

なる q があり，$q \leqq y$，したがって $p \neq q$ で

$$[p \cup q] = 1.$$

ここで $r = x \cap (p \cup q)$ とおいて，$q \leqq y$ を用いれば

$$q \cup r \leqq y \cup (x \cap (p \cup y)) = y \cup z = y.$$

一方 $x \cup p \geqq z' \geqq q$ により $x \cup p \geqq p \cup q$ であるから，上記の $[p \cup q] = 1$ も参照して P_2 と P_3 を用いると

$$r = x \cap (p \cup q) > 0.$$

また $q \cap r \leqq q \cap x = 0$ により $q \cap r = 0$ となるから

$$[q \cup r] \geqq [r] + 1 \geqq 1 = [p \cup q].$$

これと $q \cup r \leqq p \cup q$ から $q \cup r = p \cup q$ を得て，$p \leqq q \cup r \leqq y$ となるが，それは $p \cap y = 0$ に反する．

ゆえに $z' \leqq x$，したがって $(x \cup p) \cap y = z$ である．

次に恒等式 $[x \cup y] = [x] + [y] - [x \cap y]$ を数学的帰納法によって証明しよう．$[y] = -1$ すなわち $y = 0$ のときは明白．$[y] = k-1$ ならば成り立つと仮定して $[y] = k$ のときにも成り立つことを示せばよい．$[y] = k$，$x \cap y = z$ とする． $y = z$ のときは $x \cup y = x$ となって自明であるから，$y > z$ と仮定する．そこで，

$$z \leqq y_1, \qquad y_1 \cup p = y, \qquad y_1 \cap p = 0$$

なる y_1，p がある．ここで z を詳しく書けば

$$x \cap (p \cup y_1) = z \leqq y_1, \qquad p \cap y_1 = 0$$

となるから,

$$x \cap p=0, \quad (x \cup p) \cap y_1=z.$$

$x \cap p=0$ と $p \cap y_1=0$ から

$$[x \cup p]=[x]+1, \quad [y]=[y_1]+1.$$

ゆえに $[y_1]=k-1$ となって

$$[x \cup y]=[x \cup p \cup y_1]$$
$$=[x \cup p]+[y_1]-[(x \cup p) \cap y_1]=[x]+[y]-[z].$$

これで証明は済んだ.

この恒等式と P_1 とから, $m(x/y)=[x]-[y]$ は正値な modular 関数であることがわかる. したがって, われわれの考えてきたラティスは modular である. それの $x>0$ なる元は有限個の原子元の ジョインとして表わされるから, これは極大極小条件を満たし可補的である.

条件 P_1, P_2, P_3 を満たす関数 $[x]$ の定義されたラティスを**広義射影幾何**とよべば, この節の結論として, 広義射影幾何と極大極小条件を満たす可補的な modular ラティスとは同じものであり, $[x]=\dim(x)-1$ である. 次に P_4 であるが, これは次節に示すように, “ただ1つの補元しか持たないような元は 0 および1に限る” という条件と同等である. この条件は, 一般に可補的な modular ラティスにおいて, そのラティスが**既約** (irreducible) であるといい表わされている. したがって射影幾何とは, 既約で極大極小条件を満たす可補的な modular ラティスのことであると, 自己双対な形でいい表わされる. このことは射影幾何学における双対の原理の説明となる. ラティスの理論における双対ということばも, ここから起こったのである.

§32. 広義射影幾何の分解

この節では, 特に断わらない限り広義射影幾何 L だけを考え, その原子元をまた点ともいって, それを p, q, r などで表わす. 3条件

$$p \neq q, \quad p \cap q=0, \quad [p \cup q]=1$$

は互いに同等である. 一般に, $p \leqq x$ でないことと $p \cap x=0$ とは同等である.

点 p, q に対して $p \cup r=q \cup r$ なる点 r があるとき, p と q とは**配景的**であるという. 任意の点はそれ自身と配景的である. p と q と

が配景的ならば q と p とも配景的である．更に後に示すように，p と q が配景的で q と r が配景的ならば，p と r も配景的である．したがって点の間の配景性は1つの同値関係となり，これによって，すべての点を類別することができるようになる．

$p\vee r=q\vee r$ である点 r を p, q の**配景の軸**という．特に $p\neq q$ ならば軸 r は p とも q とも異なり，

$$p\vee q=p\vee r=q\vee r$$

となる．条件 P_4 は，すべての点が互いに配景的であるということにほかならない．

点 p, q に対して，

$$a\vee p=a\vee q, \qquad a\wedge p=a\wedge q$$

となる元 a があれば p と q は配景的であることを証明しよう．

仮定の第1式の両辺を s で表わし，$l=p\vee q$ とおけば

$$s=a\vee p=a\vee q=a\vee p\vee q=a\vee l,$$

$$p/a\wedge p\approx s/a, \qquad q/a\wedge q\approx s/a, \qquad l/a\wedge l\approx s/a.$$

x の関数〔x〕は modular 関数であるから，これらの商に対して

$$[s]-[a]=[p]-[a\wedge p]=[q]-[a\wedge q]=[l]-[a\wedge l].$$

さて，仮定の第2式 $a\wedge p=a\wedge q$ において両辺が0でなければ，その式は $p=q$ となる．$p=q$ ならば p と q は配景的であるから，$p\neq q$ の場合だけを考えよう．したがって

$$a\wedge p=0, \qquad [p]-[a\wedge p]=1, \qquad [l]=[p\vee q]=1$$

ゆえに〔$a\wedge l$〕$=0$ で，$a\wedge l$ は点である．この点を r とすると

$$p\vee r=p\vee(a\wedge(p\vee q))=(p\vee a)\wedge(p\vee q)=s\wedge l.$$

同様に $q\vee r=s\wedge l$ となるから，r を配景の軸として p と q が配景的である．

やや特別な場合として，

$$a\wedge p=0, \qquad p\leqq a\vee q$$

ならば p と q は配景的であることがわかる．なぜならば，まず $p\leqq a$ でなく，したがって $q\leqq a$ でなく

$$a\wedge q=0, \qquad a<a\vee p\leqq a\vee q$$

であるから，〔$a\vee p$〕も〔$a\vee q$〕も〔a〕$+1$ に等しく $a\vee p=a\vee q$ となって，上に証明したことが適用される．

“p と q が配景的，q と r が配景的であれば，p と r も配景的である” ということ――配景的という関係の推移律――を証明しよう．

$p=q$ または $q=r$ の場合は自明である．$p\neq q$，$q\neq r$ の場合を考える．p と q の配景の軸を r_1 とし，q と r の配景の軸を p_1 とする：

$$p\cup r_1=r_1\cup q, \qquad q\cup p_1=p_1\cup r.$$

したがって

$$p\cup r_1\cup p_1=r_1\cup q\cup p_1=r_1\cup p_1\cup r.$$

これの各辺を x で表わし，上の $p\neq q$ と $q\neq r$ も考慮して

$$x\geqq p\cup q, \quad x\geqq q\cup r, \quad [x]\geqq[p\cup q]=1=[q\cup r]$$

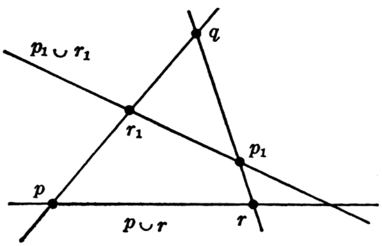


図 6.3

ここで $[x]=1$ ならば，$x=p\cup q$，$x=q\cup r$ となり，q を軸として p と r が配景的である．

次に $[x]>1$ としよう．$[r_1\cup p_1]\leqq 1$ によって

$$p\cup r_1\cup p_1=x\neq r_1\cup p_1.$$

ゆえに $p\leqq r_1\cup p_1$ でなく，同様に $r\leqq r_1\cup p_1$ でもないから

$$(r_1\cup p_1)\cap p=0=(r_1\cup p_1)\cap r$$

更に $r_1\cup p_1\cup p=r_1\cup p_1\cup r$ であったから，p と r は配景的である．

以上で，配景的という関係は同値関係であることが示された．この関係によって，広義射影幾何 L における点の全体の類別を作り，それの各類を **配景類** ということにする．

さて，p とともに $p_1,\cdots\cdots,p_m$ を L の点として，

$$p\leqq p_1\cup\cdots\cdots\cup p_m \text{ ならば } p \text{ は ある } p_i \text{ と配景的である}$$

ということを証明しよう．ただし，$m=1$ の場合も考えて，その場合の $p_1\cup\cdots\cdots\cup p_m$ は p_1 のことであると解釈する．

列 $p_1,\cdots\cdots,p_m$ における初めの k 項のジョイン

$$x_k=p_1\cup\cdots\cdots\cup p_k$$

を作り，$p\leqq x_k$ となる k の最小値を i とする．$i>1$ ならば

$$p\cap x_{i-1}=0, \qquad p\leqq x_i=x_{i-1}\cup p_i$$

となるから，p と p_i が配景的である．$i=1$ ならば，$p=p_i$ となるか

ら，やはり p と p_i が配景的である．

特に，L の最大元 1 はいくつかの点のジョインとして

$$1=p_1\vee\cdots\cdots\vee p_m$$

の形に表わされ，L の各点はこの $p_1,\cdots\cdots,\ p_m$ のどれかと配景的である．したがって，配景類は有限個（m 個以下）しかない．配景類の個数を n，配景類を $C_1,\cdots\cdots,\ C_n$ とし，各配景類 C_j に対して

$$c_j=\sup C_j$$

とおこう．最小上界 $\sup C_j$ の存在については，やや一般的な見地で，L は極大条件を満たすラティスであるということだけから，

L の部分集合 X が空集合でないときには，X の最小上界があって，X のいくつか（有限個）の元のジョインとして表わされる

ということを証明しておこう．

L の元のうち，X のいくつかの元のジョインとして表わされる元をすべて考え，a をそのような元のうちで極大なものとしよう．それは

$$a=x_1\vee\cdots\cdots\vee x_m \qquad (x_1\in X,\cdots\cdots,\ x_m\in X)$$

の形に表わされる．$x\in X$ に対して

$$b=a\vee x=x_1\vee\cdots\cdots\vee x_m\vee x$$

と置けば，a の極大性と $a\leqq b$ とによって，$a=b$ となり，したがって $x\leqq a$ となる．ゆえに a は X の上界である．また y を X の上界とすれば，各 x_i に対して $x_i\leqq y$ であるから，$a\leqq y$ となる．したがって a は X の最小上界 $\sup X$ であって

$$\sup X=x_1\vee\cdots\cdots\vee x_m \qquad (x_1\in X,\cdots\cdots,\ x_m\in X).$$

広義射影幾何 L では，X を空集合とすると，L の最小元 0 が X の最小上界になる．

配景類 C_j は点の集合であり，また空集合ではないから，C_j の最小上界 c_j は

$$c_j=p_1\vee\cdots\cdots\vee p_m \quad (\text{各 } p_i \text{ は } C_j \text{ に属する点})$$

の形に表わされる．$p\leqq c_j$ とすれば，p はこの $p_1,\cdots\cdots,\ p_m$ のどれかと配景的であり，したがって $p\in C_j$ となる．逆に，$p\in C_j$ ならば $p\leqq c_j$ となることは，c_j の定義によって自明である．

こうして，$p\leqq c_j$ と $p\in C_j$ は同じことになる．

一般に $a>0$ のとき，L の部分ラティス〔0, a〕も広義射影幾何で

あることは容易に知られる．〔0, a〕における点とは，L における点であって〔0, a〕に属するものにほかならない． また〔0, a〕の2点 p, q が L において配景的ならば，配景の軸 r は

$$r \leqq p \vee r = q \vee r = p \vee q \leqq a$$

によって〔0, a〕に属し，したがって p と q は〔0, a〕においても配景的である．特に〔0, c_j〕における点の全体は上記の C_j であり，そこでの任意の2点 p, q は〔0, c_j〕において配景的である．

それゆえ，広義射影幾何〔0, c_j〕は前節の条件 P_4 を満たす．すなわち〔0, c_j〕は射影幾何である．

配景類の全体を2組に分けて， 一方の組の合併集合を A， 他方の組の合併集合を B として

$$a = \sup A, \qquad b = \sup B$$

とおこう．A も B も点の集合である．A の元と配景的な点は A に属し，B についても同様である．c_j の場合と同様に，$p \leqq a$ と $p \in A$ は同じことになり，$p \leqq b$ と $p \in B$ は同じことになる．なお，上記の2組のうち1組は空集合であってもよいが，そのとき対応する A または B が空集合になる．A を空集合とすると，$a=0$ となり，$p \leqq a$ は決して成り立たない．

A, B の作り方からみて，L の各点は A か B に属する．また，相異なる配景類には共通点がないから，A と B には共通点がない．ゆえに，L の各点 p について，$p \leqq a$ か $p \leqq b$ かが成り立ち，しかも一方だけが成り立つ．したがって，どの点 p についても

$p \leqq a \vee b$ は成り立ち，$p \leqq a \wedge b$ は成り立たない．

ところが，L において0と異なる元はいくつかの点のジョインとして表わされる．したがって

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0$$

ゆえに b は a の補元である．

a の補元は b だけであることを示そう．すなわち，c もまた a の補元であるとして，$c=b$ を導き出すのである．$a \wedge c = 0$ であるから，$p \leqq c$ とすると $p \leqq a$ は成り立たない． ところが $p \leqq a$ か $p \leqq b$ かが成り立つのであるから，結局

$$p \leqq c \quad \text{ならば} \quad p \leqq b$$

となる．この関係から，126ページでも注意したように，$c \leqq b$ が結論される．L が modular ラティスであり，元 a の補元 b，c に対して $c \leqq b$ となったのであるから，実は $c=b$ である．

ゆえに，a の補元はただ1つしかない．

前節末における定義に従って，L が“既約”である場合を考えると，上のような a は0か1かに限られ，したがって $a=0$ か $b=0$ かが成り立ち，前記のような A，B のどちらかは空集合となってしまう．こうなるのは，配景類が1つしかない場合に限られる．したがって，L が既約な場合には P_4 が成り立ち，L は射影幾何になる．次に，既約でない場合には一般にどうなるかを考えよう．

一般に，可補的な modular ラティス L において，ある元 a の補元がただ1つしかないときに，この a を L の **中心元** といい，中心元の全体を **中心** (center) という．中心元 a の補元を b として，いかなる元 x についても

$$x=(a \wedge x) \vee (b \wedge x)$$

となることを示そう．

$a \wedge x$ の $x/0$ に相対的な補元の1つを y とする．すなわち

$$x=(a \wedge x) \vee y, \qquad a \wedge x \wedge y=0.$$

ここで $y \leqq x$ であるから，上の第2式は $a \wedge y=0$ とも書かれる．それゆえ，$a \vee y$ の補元の1つを z とすれば $(a, y, z)\perp$ である．したがって $(y, z, a)\perp$ となり

$$(y \vee z) \wedge a=0.$$

また，$a \vee y$ の補元を z としたから

$$a \vee y \vee z=1.$$

ゆえに $y \vee z$ は a の補元である．a は中心元，b はその補元であるから，b と $y \vee z$ が一致し，$b \geqq y$ となる．ゆえに modular 律により

$$b \wedge ((a \wedge x) \vee y)=(b \wedge a \wedge x) \vee y=0 \vee y=y$$

ここで最初の等式 $x=(a \wedge x) \vee y$ を用いると

$$b \wedge x=b \wedge ((a \wedge x) \vee y)=y$$

$$x=(a \wedge x) \vee y=(a \wedge x) \vee (b \wedge x).$$ （証明終）

余談になるが，いま証明された公式から，中心元 a の補元 b はまた中心元であることが証明される．実際，a' を b の補元とすれば

$$a'=(a\wedge a')\vee(b\wedge a')=(a\wedge a')\vee 0=a\wedge a'$$

によって $a'\leqq a$ となる．この a, a' がともに b の補元であるから，modular 律により $a'=a$ となる．ゆえに b の補元は a だけであり，b は中心元である．同様な方針で，中心は部分ラティスをなすことも証明され，したがって中心はブール代数であるが，ここで利用するわけではないから，証明を省略する．

本論にもどって，既約でない広義射影幾何 L を考えよう．この L には，0でも1でもない中心元がある．これを a とし，a の補元を b とすれば，b は1でも0でもない．それゆえ

$$p\leqq a,\qquad q\leqq b$$

なる点 p, q がある．この p と q が配景的であると仮定してみよう．配景の軸 r を前ページの公式の x に代入してみると，$r\neq 0$ により

$$r\wedge a\neq 0\quad \text{または}\quad r\wedge b\neq 0$$

となり，それに応じて $r\leqq a$ または $r\leqq b$ となる．$r\leqq a$ とすると

$$q\leqq q\vee r=p\vee r\leqq a$$

したがって $a\wedge b\geqq q>0$ となるが，これは a の補元を b としたことに反する．$r\leqq b$ としても同様である．ゆえに，上の仮定は成り立たず，p と q は配景的でない．

したがって，既約でない広義射影幾何は条件 P_4 を満たさない．否定的な形ばかり用いたが，対偶をとれば否定は消えて，これは前に述べたことの逆になっている．結局，広義射影幾何について既約性と P_4 は同等な条件であるということになる．

一般の可補的な modular ラティス L における中心元 a と，それの補元 b について，もう少し述べよう．この a, b に対して

$$La=[0,\ a],\qquad Lb=[0,\ b]$$

とおくと，部分ラティス La, Lb はまた可補的な modular ラティスである．L からこれらのラティスへの写像

$$L\ni x\longrightarrow x\wedge a\in La,\qquad L\ni x\longrightarrow x\wedge b\in Lb$$

は順序関係を保存する．

La と Lb から，ラティスとしての直積 $La\times Lb$ を作ってみよう．La の元 u と，Lb の元 v とを任意にとったときの順序対 $\langle u,\ v\rangle$ が，この直積の元の一般形である．上の写像を組み合わせて

$$\varphi(x)=\langle x \wedge a,\ x \wedge b\rangle$$

と置くと，$x \longrightarrow \varphi(x)$ は L から $La \times Lb$ の中への写像になり，これもまた順序関係を保存する．前に証明した式

$$x=(x \wedge a) \vee (x \wedge b)$$

は，$\varphi(x)$ の値から逆に x が定まることを示している．また，直積の任意の元 $\langle u,\ v\rangle$ をとって

$$x=u \vee v$$

とおけば，$u \leqq a$ と modular 律によって

$$x \wedge a=(u \vee v) \wedge a=u \vee (v \wedge a)$$

となる．ここで $v \leqq b$ であるから $v \wedge a=0$，したがって

$$x \wedge a=u$$

また同様に $x \wedge b=v$ となる．このことは，直積から任意にとった元が $\varphi(x)$ の形に表わされることを示している．

ゆえに L と直積 $La \times Lb$ との間には，1対1で順序を保存する対応，したがってラティスの同型対応がある．これを広義射影幾何 L に適用すれば容易に，

$$Lc_1, \cdots\cdots,\ Lc_n$$

の直積と L とが同型になることがわかる．広義射影幾何は，この意味で射影幾何の直積に分解されるのである．

§33. 連続幾何の構成

射影幾何あるいは広義射影幾何をラティスとして特徴づける見方から，射影幾何を無限次元へ，あるいは連続次元へ拡張したと考えられるいわゆる**連続幾何**（continuons geomtery）に至る1つの道が開かれる．定義は後にまわして，連続幾何の特殊な実例を，射影幾何の“極限”として構成してみよう．

任意の自然数 n をとって $2n$ 次元 vector 空間 $V(2n)$ を作る．その元は $\langle \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \cdots\cdots,\ \alpha_{2n}\rangle$ のような，$2n$ 個の数の組である．特にその中で

$$\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\cdots\cdots\alpha_{2n}=0$$

なる組の全体を $V'(n)$ とし，

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=0$$

なる組の全体を $V''(n)$ とすれば，これらはいずれも線型部分空間をなす．しかも n 次元 vector 空間 $V(n)$ と同じ構造を持っている．

いま $V(n)$，$V'(n)$，$V''(n)$ のそれぞれについて，線型部分空間の全体がなすラティスを

$$L(n),\ L'(n),\ L''(n)$$

とすれば，これらは互いに同型な射影幾何であって，ラティスとしての次元は n である． また $L'(n)$，$L''(n)$ はともに $L(2n)$ の部分ラティス，実はそれぞれ $V'(n)$，$V''(n)$ で生成された単項 ideal である． したがって，たとえば $L'(n)$ の元 x' の次元は，x' をラティス $L'(n)$ の元として考えても，ラティス $L(2n)$ の元として考えても変わらない．これを $\dim(x')$ で表わす．また

$$x' \in L'(n) \text{ かつ } x'' \in L''(n) \qquad \text{ならば} \qquad x' \wedge x'' = 0$$

となる．

上に述べたことに基づいて，

$$L(n) \ni x \longrightarrow x' \in L'(n), \qquad L(n) \ni x \longrightarrow x'' \in L''(n)$$

なるラティス同型対応を1つずつ定めておく．更に対応

$$L(n) \ni x \longrightarrow \bar{x} \in L(2n)$$

を $\bar{x} = x' \vee x''$ で定義する．これも $L(2n)$ の ある部分ラティス への ラティス同型対応であることを示そう．

まず，ラティス同型対応で次元は変わらないから

$$\begin{aligned}\dim(x' \vee x'') &= \dim(x') + \dim(x'') - \dim(x' \wedge x'') \\ &= 2\dim(x) - \dim(0) = 2\dim(x)\end{aligned}$$

したがって

$$\dim(\bar{x}) = 2\dim(x)$$

となる．この式は今後重要である．

$x \longrightarrow \bar{x}$ は順序を保存する：

$$x \leqq y \quad \text{ならば} \quad \bar{x} \leqq \bar{y}.$$

のみならずジョインを保存する：

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

特に $x \neq y$ のとき

$$x < x \vee y \quad \text{または} \quad y < x \vee y$$

であるから，次元も考慮すれば，

$$\bar{x} < \overline{x \cup y} \quad \text{または} \quad y < \overline{x \cup y}$$

を得る．$\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y}$ により，これから $\bar{x} \neq \bar{y}$ を得る．結局

$$x \neq y \quad \text{ならば} \quad \bar{x} \neq \bar{y}$$

となるから，この対応 $x \longrightarrow \bar{x}$ は1対1である．次に $L(n)$ の元 x，y を任意にとると，順序が保存されることから

$$\overline{x \cap y} \leqq \bar{x} \cap \bar{y}$$

を得るが，

$$\begin{aligned}\dim(\overline{x \cap y}) + \dim(\overline{x \cup y}) &= 2(\dim(x \cap y) + \dim(x \cup y)) \\ &= 2(\dim(x) + \dim(y)) = \dim(\bar{x}) + \dim(\bar{y}) \\ &= \dim(\bar{x} \cap \bar{y}) + \dim(\bar{x} \cup \bar{y}) = \dim(\bar{x} \cap \bar{y}) + \dim(\overline{x \cup y})\end{aligned}$$

によって $\dim(\overline{x \cap y}) = \dim(\bar{x} \cap \bar{y})$ となるから，

$$\overline{x \cap y} = \bar{x} \cap \bar{y}.$$

ゆえに $x \longrightarrow \bar{x}$ は $L(n)$ から $L(2n)$ のある部分ラティスへのラティス同型写像であって，

$$\dim(\bar{x}) = 2\dim(x)$$

である，ということがわかった．かような写像を，おのおのの自然数 n に対して1つずつ決めておく．

さて，次の3条件 i)，ii)，iii) を満たす関数 f を考えよう．

i) f の定義域は，ある自然数 m 以上の自然数全体である．

ii) m 以上の自然数 p に対しては

$$f(p) \in L(2^p), \qquad f(p+1) = \overline{f(p)}.$$

iii) $x \in L(2^{m-1})$ ならば $\bar{x} \neq f(m)$．

ただし m は f ごとに異なってもよい．また $m=1$ のときには条件 iii) を除いておく．

このような関数 f の全体を $L(\infty)$ という記号で表わそう．任意の $L(2^p)$ の元 x を与えれば，これに対して，$f(p)=x$ となる $L(\infty)$ の元 f が1つ，しかもただ1つあることは明白であろう．このことを利用して，次のように $L(\infty)$ に演算 $f \cup g$，$f \cap g$ を導入し，$L(\infty)$ をラティスにすることができる．

$f \in L(\infty)$，$g \in L(\infty)$ とする．f の定義域と g の定義域とに共通な自然数 p をとって，

$$h(p) = f(p) \cup g(p), \qquad k(p) = f(p) \cap g(p)$$

なる $L(\infty)$ の元 h, k を考えよう. これは各元 f, g, p によって一意的に決定されるが, p のほかに, f と g の定義域に共通な数 q を任意にとっても,

$$h(q)=f(q)\cup g(q) \qquad k(q)=f(q)\cap g(q)$$

が成り立つことは, $x \longrightarrow \bar{x}$ がラティス同型であることから容易に導かれる. ゆえに h および k は, f と g のみによって定まり, p の選び方に関係しない. この h, k をそれぞれ $f\cup g$, $f\cap g$ で表わす.

$L(\infty)$ の任意の元 f, g, h が与えられたとして,

$$k_1=((f\cup g)\cap h)\cup f, \qquad k_2=(f\cup g)\cap(h\cup f)$$

とおこう. f, g, h の定義域に共通な任意の数 p をとれば, 上の定義から直ちに

$$k_1(p)=((f(p)\cup g(p))\cap h(p))\cup f(p)$$
$$k_2(p)=(f(p)\cup g(p))\cap(h(p)\cup f(p))$$

が得られるが, $L(2^p)$ は modular ラティスであるから, これら両式は相等しい:

$$k_1(p)=k_2(p).$$

ゆえに $k_1=k_2$ となり, $L(\infty)$ においては modular 律が成り立つ. 一般に, すべての $L(n)$ において成り立つラティス恒等式は $L(\infty)$ においても成り立つことが, 同じ論法で証明される. 特に交換律, 結合律, 吸収律が成り立って, $L(\infty)$ はラティスをなす. 同様に $L(\infty)$ は最小元, 最大元を有し, 可補的であることが知られる.

結局 $L(\infty)$ は可補的な modular ラティスであって,

$$L(\infty)\ni f \longrightarrow f(p)$$

は $L(2^p)$ の上へのラティス準同型写像である. なお f が与えられたとき, $2^{-p}\dim(f(p))$ は, p のいかんにかかわらず一定になることは明らかである. この値を $\delta(f)$ で表わそう. 前と同様な論法で

$$\delta(f\cup g)+\delta(f\cap g)=\delta(f)+\delta(g)$$
$$\delta(f)\geqq 0$$
$$f>0 \quad \text{ならば} \quad \delta(f)>0$$
$$\delta(1)=1$$

という性質が知られる.

$L(\infty)$ は, 距離

$$\mathrm{dist}(f,\ g)=\delta(f\vee g)-\delta(f\wedge g)$$

の定義された距離空間と考えられる．この距離に関する $L(\infty)$ の完備化（§30. 参照）を L とし，$L(\infty)$ におけるラティス演算を L にまで拡張しよう．

a, b を L の任意の元とすれば，$L(\infty)$ の元の列 f_1, f_2,…… および g_1, g_2,…… でそれぞれ

$$\lim \mathrm{dist}(f_n,\ a)=0, \qquad \lim \mathrm{dist}(g_n,\ b)=0$$

なるものがある．かような列については

$$\lim \mathrm{dist}(f_m,\ f_n)=0, \quad \lim \mathrm{dist}(g_m,\ g_n)=0 \qquad (m,\ n\to\infty)$$

である．$L(\infty)$ の任意の元 f, g をとると，

$$\delta(f\wedge g)\leqq\delta(f)\leqq\delta(f\vee g), \qquad \delta(f\wedge g)\leqq\delta(g)\leqq\delta(f\vee g)$$

により，

$$|\delta(f)-\delta(g)|\leqq \mathrm{dist}(f,\ g)$$

である．したがって

$$\lim|\delta(f_m)-\delta(f_n)|=0 \qquad (m,\ n\to\infty).$$

ゆえに実数 $\lim\delta(f_n)$ が存在する．また §30. で証明したように

$$\mathrm{dist}(f\vee h,\ g\vee h)\leqq \mathrm{dist}(f,\ g)$$

であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(f_m\vee g_m,\ f_n\vee g_n)\\ &\quad\leqq \mathrm{dist}(f_m\vee g_m,\ f_m\vee g_n)+\mathrm{dist}(f_m\vee g_n,\ f_n\vee g_n)\\ &\quad\leqq \mathrm{dist}(g_m,\ g_n)+\mathrm{dist}(f_m,\ f_n)\end{aligned}$$

したがって

$$\lim \mathrm{dist}(f_m\vee g_m,\ f_n\vee g_n)=0.$$

L は完備な距離空間であるから，

$$\lim \mathrm{dist}(f_n\vee g_n,\ d)=0$$

なる L の元 d が（ただ一つ）存在する．

上記の極限 $\lim\delta(f_n)$ および d は列 f_1, f_2,…… および g_1, g_2,…… のとり方にかかわりなく a, b のみで定まることが，容易に知られる．これらをそれぞれ $\delta(a)$ および $a\vee b$ で表わす．すなわち

$$\delta(\lim f_n)=\lim\delta(f_n),$$

$$\lim f_n\vee\lim g_n=\lim(f_n\vee g_n)$$

と書かれる．同様に $a\wedge b$ を定義する：

$$\lim f_n \cap \lim g_n = \lim(f_n \cap g_n).$$

このとき，たとえば

$$(\lim f_n \cup \lim g_n) \cap \lim h_n = \lim(f_n \cup g_n) \cap \lim h_n$$
$$= \lim((f_n \cap g_n) \cap h_n)$$

のような変形を繰り返すことにより，任意のラティス多項式 P に対して

$$P(\lim f_n,\ \lim g_n, \cdots\cdots) = \lim P(f_n,\ g_n, \cdots\cdots)$$

が証明される．したがって，$L(\infty)$ において成り立つ任意のラティス恒等式 $P=Q$ は L においても成り立つ．同様に

$$\mathrm{dist}(f,\ g) = \delta(f \cup g) - \delta(f \cap g) \qquad (f,\ g \in L(\infty))$$

のような恒等式が L においても成り立つ．すなわち

$$\mathrm{dist}(a,\ b) = \delta(a \cup b) - \delta(a \cap b)$$

が L の任意の元 a，b に対して成り立つ．

ゆえに L はラティス，しかも modular ラティスであって，関数 δ によって距離づけられたラティスである．$L(\infty)$ が L の部分ラティスであること，関数 δ の L における定義が $L(\infty)$ における定義に矛盾しないことも，明白であろう．

さて §30．において示したように，有界な modular 関数によって距離づけられたラティスは，距離空間として完備ならばラティスとしても完備である．L において

$$0 \leqq \delta(a) \leqq 1$$

は明らかであるから，L は完備ラティスである．したがって最小元，最大元があるが，それらは $L(\infty)$ の 0，1 と一致する．

ここで $L(1)$，$L(2)$，$L(2^2)$，…… から $L(\infty)$ を作った方法は，ラティス以外の代数系にも適用されうる1種の代数的極限移行である．また $L(\infty)$ から L を作った方法は，一般に，距離づけられたラティスに適用しうる完備化である．

さて L が可補的であることを証明しよう．

まず広義射影幾何の元 a，b，c が与えられたとし，特に c は a の1つの補元であるとする．このとき b の補元 d で

$$\dim(c \cup d) - \dim(c \cap d) \leqq \dim(a \cup b) - \dim(a \cap b)$$

なるものがあることを示そう．

最初に $b\leqq a$ の場合．b の $a/0$ に相対的な補元の 1 つを b' とする：

$$a=b\cup b',\qquad b\cap b'=0.$$

このとき $(b,\ b',\ c)\perp$ であるから，

$$(c\cup b')\cap b=0.$$

そこで

$$d=c\cup b'$$

と置けば，d は b の補元である：

$$b\cap d=0,\qquad b\cup d=b\cup c\cup b'=c\cup a=1.$$

$d/c\approx b'/0\approx a/b$ であるから

$$\dim(d)-\dim(c)=\dim(a)-\dim(b).$$

これで $b\leqq a$ の場合はかたづいた．

次に $a\leqq b$ の場合には，双対ラティスに移って考えれば，そこでの x の次元はもとの $\dim(1)$ と $\dim(x)$ の差に等しいから，上と双対に定めた元 d がやはり上の等式を満たす．相補的という概念は自己双対的であるから，これで $a\leqq b$ の場合もかたづく．

一般の場合，既に証明された部分により，$a\cap b$ の補元 d_1 で

$$d_1\geqq c$$

$$\dim(d_1)-\dim(c)=\dim(a)-\dim(a\cap b)$$

なるものが存在し，また b の補元 d で

$$d\leqq d_1$$

$$\dim(d_1)-\dim(d)=\dim(b)-\dim(a\cap b)$$

なるものが存在する．次元から導入された距離に関する不等式

$$\mathrm{dist}(c,\ d)\leqq\mathrm{dist}(c,\ d_1)+\mathrm{dist}(d_1,\ d)$$

の両辺を次元で書き直せば，それぞれ

$$\dim(c\cup d)-\dim(c\cap d)$$

$$(\dim(a)-\dim(a\cap b))+(\dim(b)-\dim(a\cap b))$$

となり，証明が終わる．

$L(\infty)$ の元 $f,\ g,\ h$ が与えられ，特に h が f の 1 つの補元であるとする．このとき $\mathrm{dist}(h,\ k)\leqq\mathrm{dist}(f,\ g)$ なる g の補元 k が存在することを示そう．それには $f,\ g,\ h$ の定義域に共通な数 p をとり，

$$a=f(p),\qquad b=g(p),\qquad c=h(p)$$

とする．$L(2^p)$ に前ページで証明した事実を適用し，次に $d=k(p)$ なる $L(\infty)$ の元 k をとれば，

$$\dim(c\vee d)-\dim(c\wedge d)\leqq\dim(a\vee b)-\dim(a\wedge b)$$

両辺を 2^p で割って

$$\operatorname{dist}(h,\ k)\leqq\operatorname{dist}(f,\ g)$$

を得る．また

$$g(p)\wedge k(p)=0,\qquad g(p)\vee k(p)=1$$

から $g\wedge k=0$, $g\vee k=1$ を得る．ゆえに k は g の補元である．

L の任意の元を a として，a の補元を求めよう．なお任意の自然数 m を1つ固定しておく．まず，

$$a=\lim f_n,\qquad f_n\in L(\infty)$$

なる列 f_1, f_2,…… をとり，必要ならば適当に項を省いて，

$$\operatorname{dist}(f_n,\ f_{n+1})<2^{-(m+n)}\qquad(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

とする．これに対して h_1, h_2,…… を順次に次のように定める：
f_1 の補元の1つを h_1 とする．h_n が定まったとき，f_{n+1} の補元 h で

$$\operatorname{dist}(h_n,\ h)\leqq\operatorname{dist}(f_n,\ f_{n+1})$$

なるものの1つを h_{n+1} とする．
この作り方からみて，$n<l$ のとき

$$\operatorname{dist}(h_n,\ h_{n+1})+\operatorname{dist}(h_{n+1},\ h_{n+2})+\cdots\cdots+\operatorname{dist}(h_{l-1},\ h_l)$$
$$<2^{-(m+n)}+2^{-(m+n+1)}+\cdots\cdots+2^{-(m+l-1)}<2^{-(m+n-1)}$$

したがって

$$\operatorname{dist}(h_n,\ h_l)<2^{-(m+n-1)}$$
$$\lim\operatorname{dist}(h_n,\ h_l)=0\qquad(n,\ l\to\infty)$$

となって $\lim h_n$ が存在する．それを c とすれば，

$$a\wedge c=\lim f_n\wedge\lim h_n=\lim(f_n\wedge h_n)$$

であるが，$f_n\wedge h_n=0$ であるから

$$a\wedge c=0.$$

また双対に $a\vee b=1$ で，c は a の補元である．

なお $\operatorname{dist}(h_1,\ h_n)<2^{-m}$ であるから

$$\operatorname{dist}(h_1,\ c)\leqq 2^{-m}.$$

これは後に必要になる．

こうして L は可補的な modular ラティスであることが知られた．

次に L が既約であること，すなわち 0，1 以外の元は必ず少なくも 2 個の補元を持つことを証明しよう．

再び広義射影幾何を考えて，それの点を p，q，r などで表わす．p と q とが配景的であるということは，$p\cup r=q\cup r$ なる点 r があることとして定義されたが，これを

$$p\cap x=q\cap x=0,\qquad p\cup x=q\cup x=p\cup q$$

なる元（点と限らない）x が存在することといっても同じことになる（$p=q$ ならば $x=0$ とし，$p\neq q$ ならば $x=r$ とすれば，配景的な点に対してかような x があることが知られ，逆も同様にすぐわかる）．かような x をも p，q の配景の軸といおう．一般の元 a，a' に対しても，

$$a\cap x=a'\cap x=0,\qquad a\cup x=a'\cup x=a\cup a'$$

なる元 x があるとき，a と a' とは互いに**配景的**であるといい，x を**配景の軸**という．軸 x については

$$\dim(x)+\dim(a)=\dim(a\cup a')$$

であるが，a と a' とを交換してもよいから，互いに配景的な元の次元は相等しい．

特に射影幾何においては，逆に

$$\dim(a)=\dim(a')$$

ならば a と a' は互いに配景的である，ということを証明しよう．

$a\cap a'$ の $a/0$，$a'/0$ に相対的な補元をそれぞれ u，v とすれば，

$$\dim(u)=\dim(a)-\dim(a\cap a')=\dim(a')-\dim(a\cap a')=\dim(v)$$

この値を n とすれば，

$$u=p_1\cup p_2\cup\cdots\cdots p_n,\qquad v=q_1\cup q_2\cup\cdots\cdots\cup q_n$$
$$\{p_1,\cdots\cdots,\ p_n\}\perp,\qquad \{q_1,\cdots\cdots,\ q_n\}\perp$$

なる点 $p_1,\cdots\cdots,\ p_n,\ q_1,\cdots\cdots,\ q_n$ がある．1 つの射影幾何の点はすべて互いに配景的であるから，

$$p_i\cup r_i=q_i\cup r_i=p_i\cup q_i$$

なる n 個の点 $r_1,\cdots\cdots,\ r_n$ がある．そのジョインを x とすると

$$\begin{aligned}a\cup x&=(a\cap a')\cup u\cup x\\&=(a\cap a')\cup p_1\cup r_1\cup\cdots\cdots\cup p_n\cup r_n\\&=(a\cap a')\cup p_1\cup q_1\cup\cdots\cdots\cup p_n\cup q_n\end{aligned}$$

$$=(a\wedge a')\vee u\vee v$$
$$=(a\wedge a')\vee u\vee(a\wedge a')\vee v=a\vee a'$$

によって

$$a\vee x=a\vee a'.$$

同様に $a'\vee x=a\vee a'$ となる．x は n 個の点のジョインであるから $\dim(x)\leqq n$ であって

$$\dim(a\wedge x)=\dim(a)+\dim(x)-\dim(a\vee x)$$
$$\leqq\dim(a)+n-\dim(a\vee a')$$
$$=\dim(a\wedge a')+n-\dim(a')=0\,.$$

したがって $\dim(a\wedge x)=0$，すなわち

$$a\wedge x=0\,.$$

同様に $a'\wedge x=0$ となる．ゆえに a と a' は配景的である．

射影幾何の相補的な元 a，b を任意にとり，これに対して

$$\dim(b\vee c)-\dim(b\wedge c)=2\min\{\dim(a),\ \dim(1)-\dim(a)\}$$

なる a の補元 c があることを示そう．$\dim(a)+\dim(b)=\dim(1)$ であるから，$\dim(a)\leqq\dim(b)$ の場合には上式の右辺は $2\dim(a)$ となる．この場合をまず考えて，

$$a'\leqq b \text{ かつ } \dim(a')=\dim(a)$$

なる元 a' をとれば

$$(a'\vee a)\wedge b=a'\vee(a\wedge b)=a'$$
$$a\wedge a'=0.$$

a と a' の配景の軸を x とすれば，これらの式から

$$x\wedge b=x\wedge(a'\vee a)\wedge b$$
$$=x\wedge a'$$
$$=0$$
$$\dim(x)=\dim(a\vee a')-\dim(a)=\dim(a')$$

を得る．a' の $b/0$ に相対的な補元を x' とすれば

$$x\wedge x'=0,\qquad \dim(x')=\dim(b)-\dim(a').$$

そこで $c=x\vee x'$ とおけば

$$\dim(c)=\dim(b)\,.$$

ここで

$$a\vee c=a\vee x\vee x'=a\vee a'\vee x'=a\vee b=1$$

により

$$\dim(a \wedge c) = \dim(a) + \dim(b) - \dim(1) = 0$$

となるから，

$$a \wedge c = 0$$

ゆえに c は a の補元である．また $a \vee c = 1$ と同様にして $a' \vee c = 1$ を，したがって $b \vee c = 1$ を得る．$x' \leqq b$ により

$$b \wedge c = b \wedge (x \vee x') = (b \wedge x) \vee x'$$

であるから，$b \wedge x = 0$ によって

$$b \wedge c = x'$$

$$\begin{aligned}\dim(b \vee c) - \dim(b \wedge c) &= \dim(1) - \dim(x') \\ &= \dim(a) + \dim(b) - (\dim(b) - \dim(a)),\end{aligned}$$

すなわち

$$\dim(b \vee c) - \dim(b \wedge c) = 2\dim(a)$$

で，$\dim(a) \leqq \dim(b)$ の場合は証明できた．双対なラティスもまた射影幾何であるから，既に証明された部分は双対ラティスにおいても成り立つ．これを初めのラティスにおける事実としていい表わせば，それが $\dim(a) \geqq \dim(b)$ の場合にほかならない．

繰り返し用いた論法で，これは $L(\infty)$ に拡張されて次のようになる：f の補元 g に対して，f の補元 h を

$$\mathrm{dist}(g, h) = 2\min\{\delta(f), \delta(1) - \delta(f)\}$$

となるようにとることができる．

これを既約性の証明に使おう．

L の可補性を証明した 142 ページの方法で，L の任意の元 a に対して $L(\infty)$ の元の列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ および $h_1, h_2, \cdots\cdots$ を作る．h_1 としては $L(\infty)$ における f_1 の任意の補元をとることができた．そこで f_1 の補元 g_1 をもう 1 つとって，h_n と同じ方法で $g_1, g_2, \cdots\cdots$ を作り，

$$b = \lim g_n, \qquad c = \lim h_n$$

と置けば，前に注意したように

$$\mathrm{dist}(b, g_1) \leqq 2^{-m}, \qquad \mathrm{dist}(c, h_1) \leqq 2^{-m}$$

である．いま

$$\mathrm{dist}(g_1, h_1) = 2\min\{\delta(f_1), \delta(1) - \delta(f_1)\}$$

となるようにしておけば，$\mathrm{dist}(a, f_1) < 2^{-m}$ により

$$\mathrm{dist}(g_1,\ h_1) > 2\min\{\delta(a),\ \delta(1)-\delta(a)\} - 2^{-m+1}$$

また

$$\mathrm{dist}(g_1,\ h_1) \leqq \mathrm{dist}(g_1,\ b) + \mathrm{dist}(b,\ c) + \mathrm{dist}(c,\ h_1)$$
$$\leqq \mathrm{dist}(b,\ c) + 2^{-m+1}$$

であるから

$$\mathrm{dist}(b,\ c) > 2\min\{\delta(a),\ \delta(1)-\delta(a)\} - 2^{-m+2}$$

いま $0 < a < 1$ であるとすれば，m を適当にとって

$$2^{-m} < \frac{1}{2}\min\{\delta(a),\ \delta(1)-\delta(a)\}$$

にすることができる．このときは $\mathrm{dist}(b,\ c) > 0$ となるから，$b \neq c$ なる a の補元 b, c が存在することになる．ゆえに L は既約である．

L は距離空間としてもラティスとしても完備な，距離づけられたラティスであった．この性質から次のことを証明しよう：L の任意の部分集合を M とし，M の有限部分集合の全体という集合族を F とすれば，L の任意の元 a に対して

$$a \cup \inf M = \inf\{a \cup \inf K \mid K \in F\},$$
$$a \cap \sup M = \sup\{a \cap \sup K \mid K \in F\}$$

この各式をそれぞれ**下向きの連続性**，**上向きの連続性**という．これは，距離づけられたラティスがラティスおよび距離空間として完備な場合の，共通な性質である．双対の原理により，下向きの連続性の証明をすれば十分である．

既に §30（122 ページ）で一般的に述べたように，M の有限個の元のミートとして表わされる元の全体を N とすれば，N の元 x_1, x_2, …… を適当にとって

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots, \qquad \inf M = \lim x_n$$

とすることができる．なお，そこでの所論は

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots, \qquad x = \lim x_n$$
$$\text{ならば} \qquad x = \inf\{x_1,\ x_2, \cdots\cdots\}$$

という事実を含んでいた．それよりも前に §3 で証明した不等式

$$\mathrm{dist}(x \cup z,\ y \cup z) \leqq \mathrm{dist}(x,\ y)$$

によると，上の初めにしるした x_n の列に対して

$$a \cup \inf M = \lim(a \cup x_n)$$
$$a \cup x_1 \geqq a \cup x_2 \geqq \cdots\cdots$$

したがって

$$a \cup \inf M = \inf\{a \cup x_1,\ a \cup x_2, \cdots\cdots\}$$

各 x_n は F のある元 K_n に対する $\inf K_n$ であるから，

$$a \cup x_n \geqq \inf\{a \cup \inf K \mid K \in F\}$$

それゆえ，上の等式の右辺と $\inf\{a \cup \inf K \mid K \in F\}$ とを比較して

$$a \cup \inf M \geqq \inf\{a \cup \inf K \mid K \in F\}$$

ところが，$K \in F$ のとき K は M の部分集合であるから，これに対して

$$\inf M \leqq \inf K$$
$$a \cup \inf M \leqq a \cup \inf K$$

となり，したがって

$$a \cup \inf M \leqq \inf\{a \cup \inf K \mid K \in F\}$$

これで下向きの連続性が示された．その双対が上向きの連続性である．

完備で可補的な modular ラティスがこれら 2 つの連続性を持つとき，そのラティスを**連続幾何**という．これは J. von Neumann が Hilbert 空間の作用素の研究に際して遭遇し，上のようにラティスとしての特徴のみをとらえて研究したものである．ただし彼が連続性として述べた形には超限順序数の概念が必要である．ここで述べた形は，それと同等ではあるが，Zorn の lemma を用いやすい形で，前田文友氏による．

広義射影幾何も 1 つの連続幾何と考えられる．その連続性は極大，極小条件から直接にも証明され，連続幾何の概念は広義射影幾何の概念の拡張と考えられる．連続幾何については，上記の連続性が極大，極小条件に似た役割を果たし，広義射影幾何におけるいくつかの重要な定理の拡張が成立することが知られているが，既に題目が特殊に走りすぎたようである．広義射影幾何以外の連続幾何が存在することを証明したこの節をもって筆をおくこととしよう．

あとがき

ラティス一般について多くの事実や例を知るには,

G. Birkhoff : Lattice Theory (アメリカ数学会)

を参照されたい. 連続幾何については

前田文友 : 連続幾何学 (岩波書店)

がよい. 集合についての書物は掲げきれない. なお, “集合” という概念の数学における役割について, 一言しておこう.

これまでの種々な例においてみられるように, “集合” は, 何か新しい対象を導入するときにしばしば利用される.

“集合” という概念が数学者に重視されるのは, 新しい概念を大量生産するのに便利だからである. この大量生産の工程では, “集合” が何重にも使われる. つまり, “集合” を導入したことは, 数学者の立場では, 更に

集合を元とする集合

集合を元とする集合 を元とする集合

などを, 際限もなく, 一挙に導入したことになっている.

近ごろ, 数学者が初等教育における “集合” の導入について発言する機会が多い. その意見を聞くときには, 上記のような専門家としての立場を考慮しつつ聞くべきであり, 発言者も立場を反省しつつ言うべきであろう.

事　項　索　引

I

K

M

N

R

S

T

U

V

W

記 号 索 引

——著者紹介——

いわ　むら　　つらね
岩　村　　聯

1943年　東京大学理学部卒
　　　　元 立教大学理学部教授・理学博士
専　攻　数学

検印廃止

復刊 束　論

1966年10月1日　初版1刷発行
1972年5月25日　初版4刷発行
2009年9月10日　復刊1刷発行

著　者　岩　村　　聯
発行者　南　條　光　章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

NDC 411.74

発行所
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

共立出版株式会社

印刷・藤原印刷株式会社　　製本・ブロケード

Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN 978-4-320-01897-6